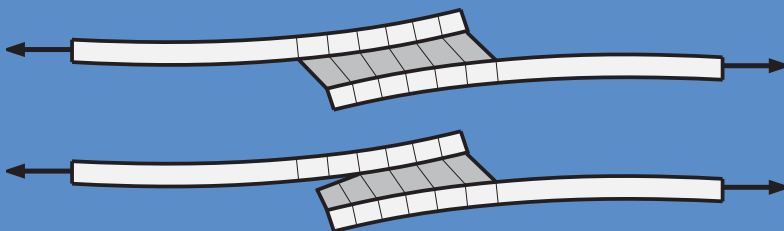




# Neue Ansätze zur Analyse der Lastübertragung und Initiierung finiter Risse in Klebverbindungen

Philipp Weißgraeber





# Neue Ansätze zur Analyse der Lastübertragung und Initiierung finiter Risse in Klebverbindungen

Vom Fachbereich Maschinenbau  
der Technischen Universität Darmstadt  
zur Erlangung des akademischen Grades  
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte

Dissertation

von

Dipl.-Ing. Philipp Weißgraeber

aus Ravensburg

Referent:	Prof. Dr.-Ing. Wilfried Becker
Korreferent:	Prof. Dr.-Ing. Helmut Schürmann
Tag der Einreichung:	26. August 2014
Tag der mündlichen Prüfung:	29. Oktober 2014

Darmstadt 2014  
D17

Weißgraeber, Philipp:

**Neue Ansätze zur Analyse der Lastübertragung und Initiierung finiter Risse in Klebverbindungen**

Dissertation

Forschungsberichte des Instituts für Mechanik der Technischen Universität Darmstadt  
Band 33

Herausgeber der Reihe:

Studienbereich Mechanik, Technische Universität Darmstadt

**Verfasser:**

Philipp Weißgraeber

Elisabeth-Selbert-Str. 17, 64289 Darmstadt

**Verlag:**

Studienbereich Mechanik, Technische Universität Darmstadt

Franziska-Braun-Straße 7, 64287 Darmstadt

**Druckerzeugung:**

Lasertype GmbH, Darmstadt

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

 Creative Commons Lizenz (CC BY-NC-ND 3.0 DE).

Freies Vervielfältigen und Weiterverbreiten – Namensnennung –  
Nicht-kommerziell – Keine Bearbeitung

ISBN 978-3-935868-33-4

# Vorwort

Diese Dissertation ist während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Strukturmechanik der Technischen Universität Darmstadt entstanden. An dieser Stelle möchte ich allen danken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Wilfried Becker danke ich herzlich für die hervorragende Betreuung und die wohlwollende Förderung meiner wissenschaftlichen Arbeit. Weiterhin danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Helmut Schürmann für sein Interesse an meiner Arbeit und die bereitwillige Übernahme des Korreferats.

Meinen Kollegen – in- und außerhalb des Fachgebietes – danke ich für die gute Zeit an der TU Darmstadt mit sehr angenehmer Arbeitsatmosphäre. Dabei gilt besonderer Dank für die zahl- und lehrreichen wissenschaftlichen Diskussionen all jenen Kollegen und Studenten, die ebenfalls großes Interesse an den Zusammenhängen und Hintergründen hatten. Hierbei sind insbesondere Nina-Carolin Fahlbusch, Julian Felger und Michael Unsinn namentlich zu nennen.

Auch möchte ich meiner Frau Stephanie, meinen Freunden und meiner Familie für ihre stete Unterstützung danken.



## Kurzfassung

Kleberverbindungen sind aufgrund ihrer vielfältigen Vorteile und Anwendungen eine Verbindungstechnik mit zunehmender Bedeutung. Um aufwändige und teure Experimente zu reduzieren, sind effiziente und genaue Analysemethoden nötig. In dieser Arbeit werden neuartige Analysemethoden für die Untersuchung und Bewertung von Kleberverbindungen vorgeschlagen. Die benötigten theoretischen Grundlagen der Elastizitätstheorie und Bruchmechanik werden dargestellt und es wird eine Einführung in die Bruchmechanik finiter Risse gegeben. Diese erlaubt mit einem gekoppelten Spannungs- und Energiekriterium die Analyse von Rissinitiiierung an schwachen Spannungssingularitäten, die mit klassischen Methoden der Festigkeitsmechanik und Bruchmechanik nicht möglich ist. Eine Übersicht über den Stand der Forschung zu Kleberverbindungen wird gegeben. Neben einem Überblick über Methoden zur Bestimmung der Spannungen in Kleberverbindungen wird eine Zusammenfassung des aus Experimenten bekannten Versagensverhaltens von Kleberverbindungen gegeben. Aktuelle Versagensmodelle für Kleberverbindungen werden umfassend dargestellt und deren Defizite diskutiert. Dabei zeigt sich, dass in den meisten Modellen empirische Längenparameter verwendet werden, die von der Struktursituation abhängen und daher stets mit entsprechenden Experimenten bestimmt werden müssen.

Für die Analyse der Deformationen und Spannungen in einschnittigen Kleberverbindungen wird ein semi-analytisches Berechnungsverfahren vorgestellt. In diesem wird die Kleberverbindung als Verbund rechteckiger Teilkörper modelliert, die in Dickenrichtung diskretisiert werden. Aus dem Prinzip des Stationärwerts des Gesamtpotentials ergibt sich ein Variationsproblem, das die Bestimmung der Verschiebungsfunktionen in axialer Richtung erlaubt. Für das resultierende Differentialgleichungssystem wird ein konvergentes und effizientes Lösungsverfahren entwickelt. Das Berechnungsverfahren zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit Referenzrechnungen. Es erlaubt eine effiziente Analyse der Lastübertragung sowie der resultierenden Deformationen in einschnittigen Überlappungsfügungen.

Zur Untersuchung von sprödem Versagen von einschnittigen Kleberverbindungen wird eine Umsetzung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums im Rahmen der Finiten Bruchmechanik auf Basis eines Finite-Elemente-Modells vorgeschlagen. Das für die Auswertung benötigte Spannungsfeld sowie die Energiefreisetzungsraten der betrachteten Risskonfigurationen werden mittels einer geeignet aufgebauten Finite-Elemente-Routine bestimmt. Dabei erfolgt eine nichtlineare Analyse, um den wichtigen Effekt der großen Biegedeformation der schlanken Fügeteile abzubilden. Die Ergebnisse der Analyse der Rissinitiiierungslasten zeigen eine gute Übereinstimmung mit experimentellen Befunden für Kleberverbindungen mit verschiedenen

Klebstoffen. Der in Experimenten beobachtete Klebschichtdickeneffekt, der zu sinkenden Versagenslasten bei steigenden Klebschichtdicken führt, wird von diesem physikalischen Versagensmodell erfasst.

Auf Basis geschlossen-analytischer, klassischer Modelle für Klebverbindungen wird ein weiteres Modell für die Betrachtung der Rissinitiierung in einschnittigen Klebverbindungen vorgeschlagen. Es basiert auf vereinfachenden Annahmen und erlaubt eine Auswertung der Rissinitiierungslasten mit sehr kurzen Berechnungszeiten. Für das Optimierungsproblem des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums wird eine hocheffiziente, iterative Lösung vorgeschlagen. Auch diese Umsetzung des gekoppelten Kriteriums zeigt eine gute Übereinstimmung mit Experimenten und eine korrekte Wiedergabe des Klebschichtdickeneffekts. Für die Diskussion der Voraussetzungen der Finiten Bruchmechanik wird eine dimensionslose Kennzahl eingeführt. Diese erlaubt eine Quantifizierung der Bedingung hinreichender Sprödigkeit.



## Abstract

Due to their various advantages adhesive joints are increasingly used in many fields of engineering. To reduce expensive and costly experiments efficient and reliable analysis approaches are necessary. In this work, new methods for the analysis and assessment of adhesive joints are proposed. The required theoretical foundations of the theory of elasticity and fracture mechanics are outlined and an introduction to Finite Fracture Mechanics is given. The latter provides the coupled stress and energy criterion, which allows for an analysis of crack initiation at weak stress singularities, that cannot be assessed with classical methods. An overview on the current state of research on adhesive joints is given. Available approaches for the analysis of stresses in adhesive joints are outlined and the possible failure behaviour of adhesive joints is discussed. Available failure models of adhesive joints and their drawbacks are discussed. A general issue is that in most models an empiric length scale is needed, that depends on the structural situation and must be determined by appropriate experiments.

A semi-analytical analysis approach is developed that allows for calculating the deformations and stresses in adhesively bonded single lap joints. In this approach, the joint is modelled as a compound of rectangular continua that are discretized in thickness direction. From the principle of stationary total potential a variational problem of the displacement functions in the discretized layers is obtained. For the resulting system of differential equations a convergent and efficient solution procedure is developed. The analysis approach allows for an efficient analysis of the load transfer and the corresponding deformations in single lap joints.

To analyse brittle failure of adhesively bonded single lap joints, an evaluation of the coupled stress and energy criterion in the framework of Finite Fracture Mechanics is developed that makes use of a finite element routine. The stress distribution and the energy release rates of the considered crack configurations, that are required for an evaluation, are obtained by a suitably developed finite element routine. Geometric nonlinearity is considered to cover the important effect of large bending deformations of the slender adherends. The resulting failure load predictions show a good agreement with experimental results of adhesive joints with several adhesives. The well-known and experimentally observed adhesive layer thickness effect, that leads to reduced failure loads for thicker adhesive layers, is covered correctly by this physically sound failure model.

Besides the numerical evaluation of the coupled stress and energy criterion an analysis approach is proposed that makes use of classical closed-form analytical solutions of stress distributions in adhesive joints. It rests upon simplifying

assumptions on crack formation and allows for analysis of crack initiation loads with very low computational effort. A highly efficient iterative solution scheme is proposed for the optimization problem associated with the coupled stress and energy criterion. Again, a good agreement with experimental results is obtained and the adhesive layer thickness effect is covered as well. For the discussion of the prerequisites of Finite Fracture Mechanics, a dimensionless brittleness number is proposed that allows for a quantification of the requirement of sufficiently brittle material behaviour.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Nomenklatur</b>	<b>11</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>15</b>
1.1 Motivation . . . . .	15
1.2 Ziel der Arbeit . . . . .	16
1.3 Aufbau der Arbeit . . . . .	16
<b>2 Theoretische Grundlagen</b>	<b>19</b>
2.1 Grundlagen der linearen Elastizitätstheorie . . . . .	19
2.2 Festigkeitskriterien . . . . .	23
2.3 Einführung in die Bruchmechanik . . . . .	24
2.4 Finite Bruchmechanik . . . . .	31
2.4.1 Hintergrund . . . . .	31
2.4.2 Gekoppeltes Spannungs- und Energiekriterium . . . . .	35
2.4.3 Analyse des Einzelrisses . . . . .	39
2.4.4 Anwendungen der Finiten Bruchmechanik . . . . .	43
<b>3 Klebverbindungen: Stand der Forschung</b>	<b>45</b>
3.1 Einführung . . . . .	45
3.2 Versagensverhalten von Klebverbindungen . . . . .	46
3.3 Ermittlung der Spannungen in Klebverbindungen . . . . .	50
3.3.1 Detaillierte Darstellung klassischer Spannungslösungen . . . . .	53
3.4 Versagensmodelle . . . . .	61
3.4.1 Festigkeitsmechanik . . . . .	61
3.4.2 Bruchmechanik . . . . .	63
3.4.3 Schädigungsmechanik . . . . .	66
<b>4 Spannungsanalyse von Klebverbindungen mittels semi-analytischem Variationsansatz</b>	<b>69</b>
4.1 Stand der Wissenschaft . . . . .	69
4.2 Grundkonzept der semi-analytischen Lösung . . . . .	70
4.3 Variationsproblem . . . . .	72
4.4 Lösung des Differentialgleichungssystems . . . . .	75
4.4.1 Rand- und Übergangsbedingungen . . . . .	79
4.4.2 Berechnung der inneren Energie . . . . .	81
4.5 Numerische Umsetzung . . . . .	82
4.6 Ergebnisse . . . . .	83
4.6.1 Konvergenz der Ergebnisse . . . . .	84

4.6.2	Vergleich mit Finite-Elemente-Analysen . . . . .	88
4.7	Anmerkungen und Ausblick . . . . .	92
4.7.1	Analyse einer angerissenen Klebverbindung . . . . .	92
4.7.2	Quadratische Ansatzfunktionen . . . . .	93
4.7.3	Erweiterung auf andere strukturelle Situationen . . . . .	93
4.7.4	Strukturoptimierungen . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Analyse von Rissinitiation mittels numerischem Modell</b>	<b>95</b>
5.1	Einführung . . . . .	95
5.2	Aufbau der Finite-Elemente-Routine . . . . .	96
5.3	Ermittlung der Energiefreisetzungsrates . . . . .	99
5.4	Auswertung des gekoppelten Kriteriums . . . . .	100
5.5	Ergebnisse . . . . .	102
5.5.1	Spannungen und Energiefreisetzungsrates . . . . .	102
5.5.2	Auswertungen der Routine . . . . .	106
5.6	Diskussion der Stabilität der initiierten Risse . . . . .	107
5.7	Vergleich mit Experimenten . . . . .	110
5.8	Studien . . . . .	114
5.8.1	Einfluss der Geometrie und der elastischen Konstanten . . . . .	114
5.8.2	Einfluss der nichtlinearen Biegedeformation der Füge-teile . . . . .	118
5.9	Untersuchung der verschiedenen Formulierungen des gekoppelten Kriteriums . . . . .	120
5.10	Anmerkungen und Ausblick . . . . .	121
5.10.1	Erweiterung auf verklebte Faserkunststoffverbunde . . . . .	121
<b>6</b>	<b>Analyse von Rissinitiation mittels geschlossen-analytischer Lösungen</b>	<b>123</b>
6.1	Einführung . . . . .	123
6.2	Modellierung der Klebverbindung . . . . .	124
6.3	Ermittlung der Energiefreisetzungsrates . . . . .	125
6.4	Umsetzung des gekoppelten Kriteriums . . . . .	132
6.4.1	Grenzen des Modells . . . . .	135
6.5	Ergebnisse der Rissinitiationsanalyse . . . . .	136
6.5.1	Vergleich mit Experimenten . . . . .	136
6.5.2	Vergleich mit den Ergebnissen der numerischen Umsetzung . . . . .	139
6.6	Untersuchung der verschiedenen Formulierungen des gekoppelten Kriteriums . . . . .	142
6.7	Einfluss der Sprödigkeit auf die Rissinitiation . . . . .	143
6.8	Anmerkungen und Ausblick . . . . .	146
6.8.1	Erweiterung auf andere Klebverbindungen . . . . .	146
6.8.2	Strukturoptimierungen . . . . .	147
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>149</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>151</b>

# Nomenklatur

## Abkürzungen

FEM	Finite-Elemente-Methode
LEBM	Linear elastische Bruchmechanik
LM	Line-Method
PM	Point-Method

## Indizes und Schreibweisen

$(\cdot)'$	Ableitung nach $x$
$(\cdot)_{ij}$	Indexnotation $i, j = 1, \dots, 3$
$(\cdot)_c$	kritischer Wert
$(\cdot)_I, (\cdot)_{II}, (\cdot)_{III}$	Rissöffnungsmoden
$(\cdot)_f$	Wert bei Versagen
$(\cdot)^{(V)}$	Volkersen-Modell
$(\cdot)^{(GR)}$	Goland-Reissner-Modell
$(\cdot)^{(OE)}$	Ojalvo-Eidinoff-Modell

## Lateinische Formelzeichen

$a$	Risslänge
$\Delta a$	finite Risslänge
$a^*, a^{**}$	charakteristische Risslängen
$A$	Fläche
$a_1, \dots, a_6$	Koeffizienten
$A_1, A_2$	Konstanten
$\mathbf{A}$	Hilfsmatrix
$b$	Breite der Klebverbindung
$C$	Steifigkeitsmatrix
$c_{ijkl}$	Elastizitätstensor
$\mathbf{C}$	Vektor der freien Konstanten
$E$	Elastizitätsmodul
$E$	innere Energie
$e_i$	Dicke einer mathematischen Schicht
$f$	beliebige Funktion
$F$	Belastung
$f_i$	Volumenkraft
$G$	Schubmodul
$\mathcal{G}$	differentielle Energiefreisetzungsrate
$\bar{\mathcal{G}}$	inkrementelle Energiefreisetzungsrate
$\mathcal{G}_c$	Bruchzähigkeit

## Nomenklatur

$H$	Nachgiebigkeit
$h, h_1, h_2$	Dicke der Füge­teile einer Klebverbindung
$I_1, I_2, I_3$	Invarianten
$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix
$K$	kinetische Energie
$K$	Spannungsintensitätsfaktor
$K_c$	Bruchzähigkeit
$k$	nichtlinearer Momentenfaktor
$k_{ij}$	Steifigkeiten
$k_t$	Schubsteifigkeit
$k'$	nichtlinearer Querkraftfaktor
$\mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_6$	Koeffizientenmatrizen
$l$	kritische Distanz
$L$	Überlappungslänge der Klebverbindung
$L_{\text{adh}}$	äußere Füge­teillänge
$L_{\text{adh}}^{\text{min}, 2\%}$	minimale äußere Füge­teillänge
$M$	Moment
$\mathbf{M}$	Systemmatrix
$n$	Anzahl der Freiheitsgrade
$N$	Anzahl der Diskretisierungsschichten
$P$	Leistung der äußeren Kräfte
$p$	Knotenkraft
$Q$	Wärmefluß
$Q$	Querkraft
$r$	Radius im Polarkoordinatensystem
$R$	Risswiderstandskurve
$R_1, R_2$	Hilfsgrößen
$\mathbf{R}$	Rand- und Übergangsbedingungsvektor
$r_p$	Größe der plastischen Zone
$\mathbf{S}$	Nachgiebigkeitsmatrix
$\tilde{\mathbf{S}}$	Schurmatrix
$\hat{\mathbf{S}}$	Hilfsmatrix
$t$	Klebschichtdicke
$t_i$	Spannungsvektor
$\mathbf{T}$	Transformationsmatrix
$\mathbf{T}^{\sigma*}, \mathbf{T}^{\tau*}$	Randbedingungsvektoren
$U$	Formänderungsenergie­dichte
$U_i, V_i$	Verschiebungsfunktionen
$u_i$ bzw. $u, v, w$	Verschiebungen
$V$	Volumen
$\mathbf{v}$	Eigenvektor
$W^a$	Arbeit der äußeren Kräfte
$\mathbf{x}, x, y, z$	Koordinaten

## Griechische Formelzeichen

$\alpha$	Klebfugenwinkel
$\alpha_{1,2}$	Hilfsgrößen
$\gamma$	Schubdeformation
$\delta$	Konvergenzgüte
$\Delta$	Hilfsgröße
$\Delta\Pi$	Änderung der Gesamtenergie
$\varepsilon$	Dehnung
$\epsilon$	Regularisierungsparameter
$\zeta$	Hilfsgröße
$\zeta_{1,2}$	lineare Ansatzfunktionen
$\kappa$	Eigenvektoranteil
$\lambda$	Singularitätsordnung
$\lambda_{\Re}, \lambda_{\mathbb{C}}$	Eigenwerte
$\mu$	Sprödigkeitszahl
$\nu$	Querkontraktionszahl
$\Pi^a$	Potential der äußeren Kräfte
$\Pi^i$	Potential der inneren Energie
$\rho$	Skalierungsfaktor
$\rho$	Hilfsgröße
$\sigma$	Spannung
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Hauptspannungen
$\tau$	Schubspannung
$\phi$	Winkel im Polarkoordinatensystem
$\chi$	Hilfsgröße
$\psi$	Mixed-Mode-Faktor
$\psi$	Hilfsvektor
$\omega$	Abklinglänge
$\omega$	Hilfsgröße
$\Omega$	Vektor der Verschiebungsfunktionen
$\Omega_c$	Oberfläche des finiten Risses





# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

Kleberverbindungen sind eine wichtige Möglichkeit Bauteile und Strukturen zu fügen. Gegenüber anderen Verbindungstechnologien wie Bolzen- oder Schweißverbindungen weisen sie eine Reihe von Vorteilen auf. Kleberverbindungen ermöglichen es etwa, nahezu beliebige, ungleiche Werkstoffe zu verbinden, ohne dabei die zu fügenden Strukturen mit Kerben zu schwächen. Insbesondere für die flächige Fügung von dünnwandigen Strukturen können Kleberverbindungen mit modernen Polymerklebstoffen sehr vorteilhaft eingesetzt werden. Dementsprechend ist diese Verbindungstechnologie für moderne Leichtbauanwendungen von besonderer Bedeutung.

Auch im Flugzeugbau zeichnet sich der Trend ab, vermehrt Kleberverbindungen einzusetzen und damit quasi zu den Anfängen des Flugzeugbaus zurückzukehren (Higgins, 2000). In diesen wurden die, meist in Holzbauweise gefertigten, Flugzeuge nahezu ausschließlich geleimt. Mit der Einführung metallischer Werkstoffe wurde zu Nietverbindungen übergegangen, die bis heute den Standard im Flugzeugbau darstellen.

Um die Vorteile der Kleberverbindung ausnutzen zu können und somit eine weite Verbreitung dieser Verbindungstechnologie zu ermöglichen, ist vertieftes Wissen über das Verhalten von Kleberverbindungen notwendig. Ohne ein detailliertes Verständnis der Versagensvorgänge und zuverlässigen Verfahren zur Vorhersage der Versagenslasten sind aufwändige und teure Experimente zur Auslegung unumgänglich. In der industriellen Praxis werden insbesondere für Parameterstudien in der Vorauslegung von Strukturdesigns, sowie deren algorithmischer Optimierung, effiziente Analysemethoden benötigt.

Kleberverbindungen sind charakterisiert durch deutliche Unterschiede der Nachgiebigkeiten der zu verbindenden Strukturen und des Klebstoffs. Dementsprechend weisen Kleberverbindungen ein komplexes strukturmechanisches Verhalten auf. Der Lastfluss ist stark an den Rändern der Klebschicht konzentriert und an den Bi-Materialpunkten von Klebschicht und den zu verbindenden Strukturen treten Spannungssingularitäten auf. Da oftmals dünnwandige Bauteile verbunden werden, treten bei Belastung der Kleberverbindung oft geometrisch-nichtlineare Versteifungseffekte auf. Die dünne Klebschicht ist nachgiebiger und typischerweise weniger fest

als die zu fügende Struktur. Folglich wird das Versagensverhalten von der Klebschicht dominiert. In experimentellen Untersuchungen beobachtet man, dass die Versagenslast von Klebverbindungen mit zunehmender Klebschichtdicke abnimmt. Dies wird in der Literatur als Klebschichtdickeneffekt bezeichnet und ist Gegenstand der Forschung. Es finden sich viele Erklärungsansätze für dieses Verhalten, die meisten sind jedoch empirischer Natur und nicht physikalisch motiviert.

### 1.2 Ziel der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung effizienter Methoden für die Bewertung von Klebverbindungen. Dabei erfolgt aufgrund des besonderen Stellenwerts der einschnittigen Klebverbindung und ihres komplexen mechanischen Verhaltens eine Konzentration auf diese Klebverbindungskonfiguration.

Für eine Bewertung von Klebverbindungen werden effiziente Methoden zur Analyse der Lastübertragung benötigt. Dabei ist neben der genauen Kenntnis der Deformationen die detaillierte Analyse der Spannungen in der Klebschicht von großem Interesse. Daher soll in dieser Arbeit ein effizienter Zugang zur Deformations- und Spannungsanalyse entwickelt werden.

Zum Versagen von Klebverbindungen kommt es oftmals durch Initiierung von Rissen im Bereich der Spannungskonzentration am Rand der Klebschicht. Dabei liegt eine schwache Spannungssingularität vor, die mit klassischen Methoden der Festigkeitsmechanik und der Bruchmechanik nicht bewertet werden kann. Die Rissinitiierung soll daher mit Hilfe des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums im Rahmen der Finiten Bruchmechanik untersucht werden. Damit soll eine Methode entwickelt werden, die eine Berechnung der Versagenslasten von Klebverbindungen erlaubt. Auch hier sind effiziente Methoden von großem Interesse, insbesondere für Vorauslegungsprozesse von Klebverbindungen oder etwaige Strukturoptimierungen. Ein Ziel dieser Arbeit ist die Bereitstellung effizienter Umsetzungen des gekoppelten Kriteriums. Dabei sollen die Versagenslastvorhersagen der entwickelten Modelle mit experimentell ermittelten Versagenslasten von Klebverbindungen verglichen werden, um die Qualität des Analysezugangs zu bewerten.

### 1.3 Aufbau der Arbeit

In Kapitel 2 der vorliegenden Arbeit werden die benötigten theoretischen Hintergründe der Elastizitätstheorie und der Bruchmechanik kompakt dargestellt. Es wird eine umfassende Darstellung der Finiten Bruchmechanik gegeben, für die es bislang keine Standardliteratur gibt. Dabei wird die Verwandtschaft des Konzeptes mit bestehenden semi-empirischen Ansätzen zur Bewertung von Rissinitiierung diskutiert und eine Übersicht über Anwendungen der Finiten Bruchmechanik gegeben.

Kapitel 3 stellt den aktuellen Stand der Forschung bezüglich Klebverbindungen dar. Das aus Experimenten bekannte Versagensverhalten von Klebverbindungen wird dabei mit einer Darstellung der bekannten Parameterabhängigkeiten sowie deren Diskussion in der Literatur ausführlich beschrieben. Es wird ein Überblick über bestehende Konzepte zur Bestimmung der Spannungen in Klebverbindungen gegeben. Bestehende Versagensmodelle für Klebverbindungen werden mitsamt ihrer etwaigen Defizite umfassend dargestellt.

In Kapitel 4 wird ein semi-analytisches Berechnungsverfahren vorgestellt, das eine Bestimmung des Deformations- und Spannungszustands mittels eines Variationsansatzes erlaubt. Mit geeigneten numerischen Lösungsverfahren wird eine effiziente Lösung des Differentialgleichungssystems gegeben und somit ein flexibles Analysewerkzeug für einschnittige Klebverbindungen vorgestellt.

Das Kapitel 5 ist der Bewertung von Rissinitiierung in einschnittigen Klebverbindungen gewidmet. Auf Basis einer detaillierten Finite-Elemente-Routine wird eine Umsetzung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums im Rahmen der Finiten Bruchmechanik vorgestellt. Die Analyse wird detailliert dargestellt und die Versagenslastvorhersagen werden mit experimentellen Ergebnissen verglichen.

In Kapitel 6 wird eine weitere Umsetzung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums vorgestellt. In dieser Umsetzung werden klassische, geschlossen-analytische Modelle für die Analyse der Klebverbindungen genutzt. Es wird ein hocheffizientes iteratives Lösungsverfahren vorgestellt und die Ergebnisse werden mit Experimenten verglichen. Die Voraussetzung hinreichender Sprödigkeit wird mittels einer vorgeschlagenen dimensionslosen Kennzahl quantifiziert.

Die Arbeit schließt mit Kapitel 7, das eine Zusammenfassung der Ergebnisse enthält.



## Kapitel 2

### Theoretische Grundlagen

*In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen dieser Arbeit kompakt dargestellt und eine einheitliche Notation eingeführt. Es werden die Grundlagen der Finiten Bruchmechanik dargestellt und das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium eingeführt. Dabei werden die Hintergründe der Theorie und deren Verwandtschaft zu anderen Konzepten für die Bewertung von Rissinitiation dargestellt. Das Kapitel schließt mit einer Übersicht über Anwendungen der Finiten Bruchmechanik.*

#### 2.1 Grundlagen der linearen Elastizitätstheorie

Das mechanische Verhalten deformierbarer Körper mit linear elastischem Materialverhalten wird von der linearen Elastizitätstheorie beschrieben. Sie dient als Ausgangspunkt für Theorien der Festkörpermechanik. Im Folgenden wird nur eine knappe Einführung gegeben.<sup>1</sup>Eine detaillierte Darstellung findet sich bei Eschenauer u. Schnell (1981), Becker u. Gross (2002) sowie Sadd (2010).

In einem Körper unter äußerer Belastung ergeben sich innere Kräfte, die sogenannten Spannungen. Der Spannungszustand wird vollständig beschrieben durch den Spannungstensor  $\sigma_{ij}$ . Dieser symmetrische Tensor enthält auf der Hauptdiagonalen die Normalspannungen  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$  sowie die Nichtdiagonalelemente  $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ , die den Schubspannungen entsprechen:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Dieser Tensor wird auch als *Cauchyscher Spannungstensor* bezeichnet. Der Spannungstensor kann in einen hydrostatischen und einen deviatorischen Anteil aufgespalten werden. Unter Verwendung der mittleren Normalspannung  $\sigma_0 = \frac{\sigma_{ii}}{3}$  ergibt

---

<sup>1</sup>Dabei wird teilweise die Indexnotation für die Darstellung der Formeln benutzt. Die Indizes  $i, j, k, l$  können die Werte 1, 2, 3 annehmen. Das *Kronecker-Delta*  $\delta_{ij}$  nimmt bei ungleichen Indizes den Wert null und bei gleichen Indizes den Wert eins an. Des Weiteren gilt die *Einsteinsche Summenkonvention*. Dabei gilt, dass zu summieren ist, wenn in einem Glied eines Terms zwei gleiche Indizes auftreten. Der Index durchläuft dabei die Werte 1, 2, 3. Eine genaue Darstellung der Indexnotation findet sich zum Beispiel im Lehrbuch von Schade u. Neemann (2009).

sich folgende additive Zerlegung:

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \delta_{ij} + s_{ij}. \quad (2.2)$$

Dabei wird  $s_{ij}$  als Spannungsdeviator bezeichnet. Bei Drehung der Basis des Spannungstensors derart, dass der Tensor nur Normalspannungen (Diagonalelemente) enthält und die Schubspannungen verschwinden, spricht man von der Transformation in das Hauptachsensystem. Die Normalspannungen werden Hauptspannungen genannt und üblicherweise der Größe nach sortiert ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ). Die Invarianten des Spannungstensors lassen sich unter Verwendung der Hauptspannungen vorteilhaft darstellen:

$$\hat{I}_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad (2.3)$$

$$\hat{I}_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3, \quad (2.4)$$

$$\hat{I}_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \quad (2.5)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen liefern einen Zusammenhang für die Spannungen in benachbarten Punkten eines Kontinuums:<sup>2</sup>

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0. \quad (2.6)$$

Dabei sind  $f_i$  die Volumenkräfte im Kontinuum.

Das *Cauchy'sche Theorem* liefert den Zusammenhang des Spannungsvektors  $t_i$  auf einer Schnittfläche mit der Normalen  $n_j$  und dem Spannungstensor:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j. \quad (2.7)$$

Der Deformationszustand eines Körpers wird durch Verzerrungstensoren beschrieben. In vielen technischen Fällen ist die Beschreibung mit dem linearisierten Verzerrungstensor

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

ausreichend. Dabei gilt folgender Zusammenhang zwischen den Verschiebungen eines deformierten Körpers  $u_i$  und den Verzerrungen  $\varepsilon_{ij}$ :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.9)$$

Der Verzerrungstensor wird oft unter Verwendung der technischen Gleitungen  $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$  dargestellt:

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2} \gamma_{12} & \frac{1}{2} \gamma_{13} \\ \frac{1}{2} \gamma_{12} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2} \gamma_{23} \\ \frac{1}{2} \gamma_{13} & \frac{1}{2} \gamma_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

---

<sup>2</sup>Hierbei stellt die Notation mit Komma eine partielle Ableitung dar. Dabei ist der Index nach dem Komma die Richtung der Ableitung.

## 2.1 Grundlagen der linearen Elastizitätstheorie

Für den linearisierten Verzerrungstensor  $\varepsilon_{ij}$  gelten (wie für jeden Tensor 2. Stufe) die gleichen Transformationsbeziehungen wie für den Cauchyschen Spannungstensor. Die Beziehungen für das Hauptachsensystem, die Invarianten und die Aufspaltung in Kugeltensor und deviatorischen Anteil sind dementsprechend ebenfalls die Gleichen.

Im Falle linearer Elastizität gilt ein linearer Zusammenhang der Spannungen mit den Verzerrungen. Dieser wird vom Hookeschen Gesetz unter Verwendung des Elastizitätstensors vierter Stufe  $c_{ijkl}$  beschrieben:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}. \quad (2.11)$$

Eine ingenieurmäßig übliche Schreibweise ist die Voigt-Notation. Dazu werden die Elemente des Spannungstensors und des Verzerrungstensors formal in einen Vektor geschrieben. Somit kann das Hookesche Gesetz als Matrix-Gleichung geschrieben werden:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}], \quad (2.12)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{23}, \gamma_{13}, \gamma_{12}], \quad (2.13)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.14)$$

bzw.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma}. \quad (2.15)$$

Im Folgenden wird nur der Fall isotropen Materialverhaltens berücksichtigt. Unter Verwendung des Elastizitätsmoduls  $E$  und der Querkontraktionszahl  $\nu$  kann die Matrix  $\mathbf{S}$  des Elastizitätsgesetzes in folgender Form angegeben werden:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Dabei bezeichnet  $G$  den Schubmodul:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.17)$$

Im Falle von isotropem Materialverhalten kann die Querkontraktionszahl (auch Poissonzahl) Werte von  $-1$  bis  $0,5$  annehmen.<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Diese Grenzen ergeben sich aus der physikalischen Forderung, dass die Formänderungsenergiegedichte für jedwede Verzerrungszustände positiv sein muss und dementsprechend gilt, dass der Elastizitätsmodul  $E$ , der Schubmodul  $G = E/2(1+\nu)$  und der Kompressionsmodul  $K = E/3(1-2\nu)$  größer null sein müssen.

## Kapitel 2 Theoretische Grundlagen

Die gespeicherte Formänderungsenergie eines deformierten elastischen Körpers ergibt sich aus der Integration der Formänderungsenergiedichte über das Volumen  $V$  des Körpers:

$$\Pi^i = \int_V U dV. \quad (2.18)$$

Die Formänderungsenergiedichte lässt sich im betrachteten Fall linearer Elastizität als Ausdruck der Spannungskomponenten oder der Verzerrungen angeben:

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (2.19)$$

$$= \frac{1}{2E} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11}) \\ + \frac{1}{2G} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2) \quad (2.20)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2 + G (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) \\ + \frac{1}{2} G (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{13}^2) \quad (2.21)$$

oder, unter Verwendung der Hauptspannungen bzw. -dehnungen,

$$U = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \quad (2.22)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 + G (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2). \quad (2.23)$$

Der Energieerhaltungssatz (auch als erster Hauptsatz der Thermodynamik bezeichnet) sagt aus, dass jede Änderung der Gesamtenergie eines elastischen Körpers gleich den ihm zugeführten Leistungen sein muss:

$$\dot{E} + \dot{K} = P + Q. \quad (2.24)$$

Dabei ist  $E$  die innere Energie,  $K$  die kinetische Energie,  $P$  die mechanische Leistung der äußeren Kräfte und  $Q$  die Leistung des Wärmeflusses in den betrachteten Körper. Die innere Energie entspricht im Falle von rein elastischem Materialverhalten dem inneren Potential  $\Pi^i$ . Im Falle einer quasistatischen Belastung ohne Wärmefluss verschwinden  $K$  und  $Q$ . Es ergibt sich für eine Änderung eines elastischen Körpers mit Volumen  $V$  von Zustand 1 zu 2:

$$\Pi_2^i - \Pi_1^i = W_{12}^a. \quad (2.25)$$

Dabei ist  $W_{12}^a$  als Arbeit der äußeren Kräfte beim Übergang von Zustand 1 zu 2 definiert:

$$W_{12}^a = \int_{\partial V} \left( \int_{\mathbf{u}_1}^{\mathbf{u}_2} \mathbf{t} d\mathbf{u} \right) dA + \int_V \left( \int_{\mathbf{u}_1}^{\mathbf{u}_2} \mathbf{f} d\mathbf{u} \right) dV. \quad (2.26)$$



Aus den Gleichgewichtsbedingungen (2.6) und der Definition des linearisierten Verzerrungstensors (2.9) lässt sich der allgemeine Arbeitssatz für einen Körper  $V$ , der zwischen einem beliebigen Gleichgewichtssystem (1) von Spannungen und äußerer Belastung und einem kinematisch zulässigen Deformationszustand (2), der die Verschiebungsrandbedingungen auf der Oberfläche  $\partial V$  erfüllt, gilt, angeben:

$$\int_V \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV = \int_V f_i^{(1)} u_i^{(2)} dV + \int_{\partial V_t} t_i^{*(1)} u_i^{(2)} dA + \int_{\partial V_u} t_i^{(1)} u_i^{*(2)} dA. \quad (2.27)$$

Dabei sind  $t^*$  die auf dem Rand  $\partial V_t$  vorgegebenen Spannungen und  $u^*$  die auf dem Rand  $\partial V_u$  vorgegebenen Verschiebungen. Aus dem Arbeitssatz lassen sich verschiedene Energieprinzipien herleiten. So erhält man zum Beispiel für den Fall, dass nur Totlasten angreifen und keine von null verschiedenen Verschiebungsrandbedingungen vorliegen, den Satz von Clapeyron:

$$2\Pi^i + \Pi^a = 0. \quad (2.28)$$

Dabei ist  $\Pi^a$  das Potential der äußeren Kräfte.

## 2.2 Festigkeitskriterien

Um das Versagen von Materialien und Strukturen zu beschreiben, wurden schon Ende des 19. Jahrhunderts Festigkeitskriterien eingeführt. Dabei wird eine Funktion der Spannungen bzw. Verzerrungen definiert und mit einem kritischen Wert verglichen. Im Falle der Betrachtung von Spannungszuständen wird dieser kritische Wert häufig Festigkeit genannt. Die Versagensbedingung lautet bei Betrachtung der Spannungen bzw. der Verzerrungen:

$$f(\sigma_{ij}) = \sigma_c \quad \text{bzw.} \quad g(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_c. \quad (2.29)$$

Diese Bedingung kann als Versagensfläche im dreidimensionalen Raum der Hauptspannungen bzw. Hauptdehnungen dargestellt werden. Im Folgenden sollen gängige Festigkeitskriterien vorgestellt werden, auf die in dieser Arbeit Bezug genommen wird oder die verwendet werden.

Das Hauptnormalspannungskriterium nach Rankine geht davon aus, dass in einem spröden Körper Versagen auftritt, wenn die größte Hauptspannung einen kritischen Wert erreicht:

$$\sigma_1 = \sigma_c. \quad (2.30)$$

Dieses Festigkeitskriterium wird typischerweise für die Beschreibung von Versagen in spröden Materialien verwendet.

Nach der Formänderungsenergiehypothese gemäß Beltrami wird Versagen postuliert, wenn die Formänderungsenergiegedichte einen kritischen Wert erreicht. Dieser

kritische Wert wird durch die Betrachtung eines einachsigen (Zug-)Spannungszustands ermittelt:

$$U = U_c = \frac{\sigma_c^2}{2E}, \quad (2.31)$$

$$\sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} = \sigma_c. \quad (2.32)$$

Dieses Kriterium besitzt eine Abhängigkeit vom hydrostatischen Spannungsanteil. Viele Materialien zeigen jedoch ein Versagensverhalten, das vom hydrostatischen Spannungszustand unabhängig ist. Dies findet Umsetzung in der Gestaltsänderungsenergiehypothese, auch als von Mises-Versagenskriterium bezeichnet. Dabei wird Versagen (meist Eintritt von plastischem Fließen) postuliert, wenn die Gestaltsänderungsenergiegedichte einen kritischen Wert erreicht. Die Gestaltsänderungsenergiehypothese ergibt sich direkt aus der Formänderungsenergiehypothese bei Annahme von inkompressiblem Materialverhalten ( $\nu = 0,5$ ):

$$\sqrt{\frac{1}{2} \left( (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right)} = \sigma_c. \quad (2.33)$$

Die von Mises Spannung findet in vielen Bereichen des Ingenieurwesens Verwendung, insbesondere bei der Betrachtung von plastischem Materialverhalten.

Neben den genannten gibt es eine ganze Reihe weiterer Versagenskriterien. So gibt es auch Zweiparametermodelle, deren Versagensfläche durch zwei Materialkonstanten charakterisiert ist. Bekannte Vertreter dieser sind das Mohr-Coulomb-Kriterium, das für die Beschreibung des Versagens von granularen Materialien verwendet wird, und das Drucker-Prager-Kriterium, das eine Erweiterung der Gestaltsänderungsenergiehypothese darstellt. Eine Übersicht über diese und weitere Versagenskriterien findet sich in Kolupaev u. Bolchoun (2008) und Gross u. Seelig (2011).

## 2.3 Einführung in die Bruchmechanik

Die Bruchmechanik beschäftigt sich mit der Analyse von Rissen, deren Entstehung und Ausbreitung. Im Vergleich zur Festigkeitsmechanik ist sie relativ jung. Erste Entwicklungen gab es Anfang des 20. Jahrhunderts. Griffith veröffentlichte 1921 seine Überlegungen zu energetischen Betrachtungen von Versagensvorgängen (Griffith, 1921). Dies wurde erst von Irwin (1957) wieder aufgegriffen und damit der Grundstein der Bruchmechanik gelegt. Eine gute Übersicht über den heutigen Stand der Bruchmechanik findet sich in Broberg (1999), Anderson (2005) und Gross u. Seelig (2011).

Ein wichtiges Feld der Bruchmechanik ist die linear elastische Bruchmechanik (LEBM). Dabei wird angenommen, dass nur sehr lokal in einer plastischen Zone um

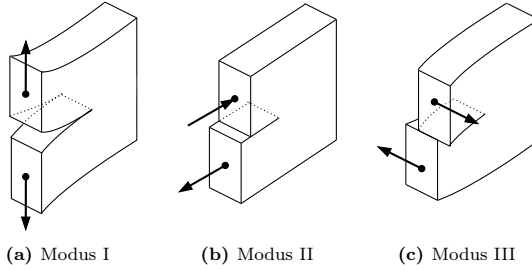


Abbildung 2.1: Rissöffnungsmoden.

die Risspitze inelastische Vorgänge auftreten und diese in der weiteren Betrachtung vernachlässigt werden können. Im Folgenden wird eine kurze Übersicht über Begrifflichkeiten und Zugänge in der linear elastischen Bruchmechanik gegeben.

Man unterscheidet im Allgemeinen drei verschiedene Rissöffnungsmoden, vgl. Abbildung 2.1. Modus-I bezeichnet die Öffnung eines Risses normal zu seinen Rissufer. Modus II ist die tangentielle Verschiebung der Rissufer in der Ebene normal zur Rissfront und Modus III ist die tangentielle Verschiebung der Rissufer tangential zur Rissfront. Im Falle einer Überlagerung dieser Rissöffnungsmoden spricht man von Mixed-Mode-Belastung.

Betrachtet man einen Riss in einem zweidimensionalen, unendlich ausgedehnten Körper erhält man mit einer asymptotischen Analyse folgenden Zusammenhang für die Verschiebungen und Spannungen im Nahbereich der Risspitze (Williams, 1952):

$$u_i = u_{i,0} + r^{1/2} f_i^{(1)}(\varphi) + \dots, \quad (2.34)$$

$$\sigma_{ij} = r^{-1/2} g_{ij}^{(1)}(\varphi) + \dots. \quad (2.35)$$

Dabei wird ein Polarkoordinatensystem  $(r, \varphi)$  an der Risspitze verwendet. Des Weiteren sind  $u_{i,0}$  die Starrkörperbewegung und  $f, g$  Geometriefunktionen des Winkels. Im Nahfeld, also in direkter Nähe der Risspitze, dominieren die singulären Terme der Spannungsdarstellung. Als Singularitätsordnungen werden die Exponenten der Reihenentwicklung der Verschiebungen bezeichnet, die kleiner als eins sind und somit zu singulären Spannungen führen. Im Falle des Risses im isotropen, homogenen Körper ist die Singularitätsordnung  $1/2$ . Die Spannungen klingen dementsprechend mit  $1/\sqrt{r}$  ab. Der symmetrische Teil des Spannungsfeldes (Modus I) ergibt sich zu:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} \begin{bmatrix} 1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \\ 1 + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Der Spannungsintensitätsfaktor  $K_I$  hängt dabei von der strukturellen Situation und Belastung ab. Er ist ein Maß für die Stärke der Beanspruchung. Analog zum Modus I gibt es Spannungsintensitätsfaktoren  $K_{II}$  für Modus II und  $K_{III}$  für Modus-III-Belastungen. Der Spannungsintensitätsfaktor  $K_I$  eines Risses der Länge  $a$  in einer unendlich ausgedehnten Scheibe unter Zugbelastung  $\sigma$  lautet

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}. \quad (2.37)$$

Für weitere bestimmte Sonderfälle lassen sich die Spannungsintensitätsfaktoren geschlossen-analytisch angeben Gross u. Seelig (2011). Viele weitere Fälle sind mit numerischen Methoden analysiert worden und die Lösungen finden sich in entsprechenden Spannungsintensitätsfaktorhandbüchern (z. B. Pilkey u. Pilkey, 2008, Tada et al., 2000).

Für den Fall eines Risses in einem unendlichen Körper unter Modus-I-Belastung  $\sigma$  kann mit Hilfe der Methode der komplexen Potentiale eine geschlossene Lösung für die Spannungen und Verschiebungen angegeben werden (Broberg (1999), Sadd (2010)). Für die Rissuferverschiebung  $v$  und die Normalspannung  $\sigma_y$  auf der Symmetrieebene ( $y = 0$ ) gilt dann:

$$v = \frac{2\sigma}{E}\sqrt{a^2 - x^2} \quad , |x| < a \quad (2.38)$$

$$\sigma_y = \sigma \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad , |x| > a \quad (2.39)$$

Diese Lösung wird auch als Westergaard-Lösung bezeichnet (Westergaard (1933), Broberg (1999)). Betrachtet man eine Reihenentwicklung der Spannungslösung an der Risspitze ergibt sich:

$$\sigma_y = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\frac{a}{x}} + \frac{3}{4}\sqrt{\frac{x}{a}} - \frac{5}{32}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{5}{2}} \right). \quad (2.40)$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem Ergebnis der zuvor dargestellten asymptotischen Lösung überein.

Betrachtet man eine Kerbe ohne Rundungsradius im Kerbgrund<sup>4</sup> erhält man folgende Ausdrücke für das Verschiebungs- und Spannungsnahfeld:

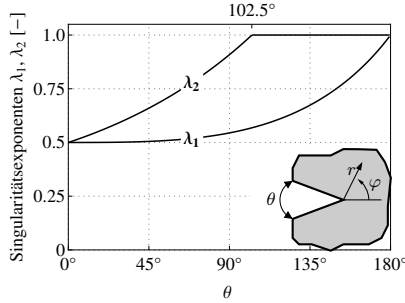
$$u_i = u_{i,0} + r^{\lambda_1} f_i^{(1)}(\varphi) + r^{\lambda_2} f_i^{(2)}(\varphi) + \dots, \quad (2.41)$$

$$\sigma_{ij} = r^{\lambda_1-1} g_{ij}^{(1)}(\varphi) + r^{\lambda_2-1} g_{ij}^{(2)}(\varphi) + \dots. \quad (2.42)$$

Hier sind die Singularitätsordnungen  $\lambda_1, \lambda_2$  abhängig vom Öffnungswinkel  $\theta$  der Kerbe, siehe Abbildung 2.2. Dabei ist der Singularitätsexponent  $\lambda_1$  mit Modus I und  $\lambda_2$  mit Modus II verknüpft. Der Sonderfall des Risses ist im Fall  $\theta = 0$  enthalten.

---

<sup>4</sup>Diese Konfiguration wird in der Literatur üblicherweise als V-Kerb bzw. V-notch bezeichnet.



**Abbildung 2.2:** Singularitätsexponenten als Funktion des Kerböffnungswinkels.

Ab einem Öffnungswinkel von  $102,5^\circ$  tritt nur bei einer Modus-I Belastung eine Spannungssingularität auf.

Tritt in einem Körper aus zwei verschiedenen Materialien ein Riss im Interface der Materialien auf, ergibt sich wieder eine Singularitätsordnung von  $1/2$ , jedoch mit einem komplexen Anteil:  $\lambda = 1/2 + \epsilon i$ . Dieser führt zu oszillierenden, abklingenden Spannungen:

$$u_i = u_{i,0} + r^{1/2} f_i^{(1)}(\varphi) \cos(\epsilon \ln r) + \dots, \quad (2.43)$$

$$\sigma_{ij} = r^{-1/2} \cos(\epsilon \ln r) g_{ij}^{(1)}(\varphi) + \dots \quad (2.44)$$

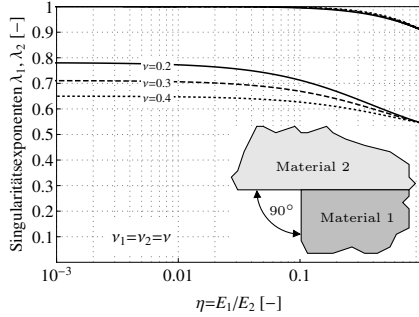
Wie schon im homogenen Körper treten auch bei Kerben in Bi-Materialkonfigurationen Spannungssingularitäten auf (Bogy, 1971). Allgemein nehmen die Verschiebungen und Spannungen die Form

$$u_i = u_{i,0} + r^{\lambda_1} f_i^{(1)}(\varphi) + r^{\lambda_2} f_i^{(2)}(\varphi) + \dots, \quad (2.45)$$

$$\sigma_{ij} = r^{\lambda_1-1} g_{ij}^{(1)}(\varphi) + r^{\lambda_2-1} g_{ij}^{(2)}(\varphi) + \dots \quad (2.46)$$

an. Die Singularitätsordnungen hängen neben der geometrischen Konfiguration (Kerböffnungswinkel, Anordnung der Sektoren) auch von den elastischen Eigenschaften der Materialien ab. In Abbildung 2.3 sind die Singularitätsexponenten einer Bi-Materialkonfiguration mit  $90^\circ$ -Kerb als Funktion des elastischen Kontrasts  $\eta$  (dem Verhältnis der Elastizitätsmoduln der beiden Materialien) für unterschiedliche Querkontraktionszahlen dargestellt. Dabei wird die analytische Lösung für Bi-Materialkerben von Sator u. Becker (2012) verwendet.

Im Allgemeinen sind auch stärkere Singularitäten als die Rissspitzensingularität möglich (Sator, 2010, Mayland, 2012). Eine Schranke für die Singularitätsexponenten ergibt sich aus der Forderung beschränkter Formänderungsenergie. So kann die Singularitätsordnung  $\lambda$  nie kleiner als 0 im 2D-Fall und  $-0,5$  im 3D-Fall werden.



**Abbildung 2.3:** Singularitätsexponenten im rechtwinkligen Bimaterialkerb als Funktion des elastischen Kontrasts  $\eta$  (dem Verhältnis der Elastizitätsmoduln der beiden Materialien) für unterschiedliche Querkontraktionszahlen.

Betrachtet man einen (gedachten) Rissfortschritt  $\Delta a$  in einem zweidimensionalen Körper mit Einheitstiefe, so erhält man die freigesetzte Energie über den Vergleich der Gesamtenergie. Bezieht man die freigesetzte Energie  $-\Delta\Pi$  auf den betrachteten Rissfortschritt und betrachtet einen infinitesimal kleinen Rissfortschritt, erhält man die differentielle Energiefreisetzungsrates:

$$\mathcal{G} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} -\frac{\Delta\Pi}{\Delta a} = -\frac{d\Pi}{da}. \quad (2.47)$$

Die differentielle Energiefreisetzungsrates kann auch über das virtuelle Risssschließintegral berechnet werden. Dabei wird das virtuelle, quasistatische Schließen eines Risses betrachtet und die benötigte Arbeit berechnet. Dazu werden die Spannungen vor der Rissöffnung entlang des gedachten Risses mit den Verschiebungen der geöffneten Rissufer multipliziert, um die virtuelle Risssschließarbeit zu erhalten. Bezeichnet man die Normalspannungen auf dem betrachteten Riss mit  $\sigma_n$  und die tangentialen Schubspannungen mit  $\sigma_{nt}$  und  $\sigma_{ns}$  und die Klaffung der Rissufer mit  $u_n$  sowie die entsprechenden Differenzen der Tangentialverschiebungen mit  $u_{nt}$  und  $u_{ns}$ , so erhält man folgenden Ausdruck für die Änderung der Gesamtenergie:

$$\Delta\Pi = - \int_{\Delta a} \left( \underbrace{\frac{1}{2}\sigma_n u_n}_{\text{Modus I}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sigma_{nt} u_{nt}}_{\text{Modus II}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sigma_{ns} u_{ns}}_{\text{Modus III}} \right) da. \quad (2.48)$$

Häufig wird ein selbstähnliches Risswachstum angenommen, so dass für die Spannungen vor dem Rissfortschritt und die Verschiebungen der Rissufer die gleiche Lösung verwendet werden kann. Das virtuelle Risssschließintegral wird insbesondere bei der Verwendung der Finite-Elemente-Methode häufig genutzt, um Energiefreisetzungsrates von Risskonfigurationen zu berechnen.

Vergleicht man die Energiefreisetzungsrate mit einer kritischen Energiefreisetzungsrate, der sogenannten Bruchzähigkeit  $\mathcal{G}_c$ , erhält man das sogenannte Griffithsche Bruchkriterium

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_c. \quad (2.49)$$

Es stellt eine energetische Bedingung für Risswachstum dar. Risswachstum ist demnach nur möglich, wenn die für den Bruchprozess benötigte Energie (Oberflächenenergie der neuen Oberfläche und dissipierte Energie) freigesetzt wird.

Alternativ zu der Formulierung mit Energiefreisetzungsraten wird im K-Konzept ein Bruchkriterium mit einem kritischen Wert des Spannungsintensitätsfaktors verwendet:

$$K_I = K_{Ic} \quad \text{bei reinem Modus I} \quad (2.50)$$

$$K_{II} = K_{IIc} \quad \text{bei reinem Modus II} \quad (2.51)$$

$$K_{III} = K_{IIIc} \quad \text{bei reinem Modus III.} \quad (2.52)$$

Dabei hat  $K_c$  die Einheit  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$  und wird ebenfalls (neben  $\mathcal{G}_c$ ) als Bruchzähigkeit bezeichnet.

Im Falle einer Kombination der drei Rissöffnungsmoden, einer sogenannten Mixed-Mode-Belastung, muss ein entsprechend gewähltes Kriterium einen Zusammenhang zwischen den einzelnen Spannungsintensitätsfaktoren herstellen:

$$f(K_I, K_{II}, K_{III}) = K_c. \quad (2.53)$$

Es lässt sich zeigen, dass im Falle von linear-elastischem Materialverhalten das K-Konzept und das Griffithsche Kriterium ineinander übergehen. In diesem Falle gilt

$$\mathcal{G} = \frac{K_I^2}{E^*} + \frac{K_{II}^2}{E^*} + \frac{K_{III}^2}{2G}; \quad (2.54)$$

dabei ist

$$E^* = \begin{cases} E & \text{im ebenen Spannungszustand} \\ \frac{E}{1-\nu^2} & \text{im ebenen Verzerrungszustand.} \end{cases} \quad (2.55)$$

Um etwaige plastische Deformationen in der Nähe der Risspitze zu berücksichtigen wurde von Irwin (1958) eine Risslängenkorrektur vorgeschlagen (Anderson (2005), Gross u. Seelig (2011)). Aus einer Gleichgewichtsbetrachtung bei kritischer Last folgt dann die Größe der plastischen Zone von:

$$2r_p = \frac{1}{n\pi} \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_c} \right)^2, \quad (2.56)$$

wobei  $n$  bei einem ebenen Verzerrungszustand den Wert drei und im Falle eines ebenen Spannungszustandes den Wert eins annimmt. Außerhalb der plastischen Zone ergibt sich wieder die Nahfeldlösung der Spannung, wobei dieses infolge der plastischen Zone um  $r_p$  verschoben ist. Es resultiert also eine effektive (korrigierte) Risslänge von  $a_{\text{eff}} = a + r_p$ . So folgt mit dem K-Kriterium (2.53) die kritische Last der Irwinschen Risslängenkorrektur

$$\sigma_f^{\text{Irwin}} = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi a}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r_p}{a}}}. \quad (2.57)$$

Man sieht, dass die Sprödigkeit nicht nur von Materialparametern sondern auch von einer Strukturabmessung (nämlich der Risslänge  $a$ ) abhängt. Für beliebig sprödes Verhalten mit  $r_p/a \rightarrow 0$  reduziert sich die Versagenslast nach Irwin auf die kritische Last der linear elastischen Bruchmechanik. Für hinreichend große Werte von  $r_p/a$  wird jedoch die plastische Zone zu groß, als dass die Annahmen der linear elastischen Bruchmechanik gültig bleiben. Dann müssen Konzepte der elastisch-plastischen Bruchmechanik verwendet werden (Broberg (1999), Gross u. Seelig (2011)). Ein wichtiges Modell ist hierbei das Fließstreifenmodell nach Dugdale (1960), das mit einer kritischen Rissöffnung arbeitet.

In den zuvor genannten Methoden wurde stets von einer konstanten Bruchzähigkeit ausgegangen. Die Bruchzähigkeit wird jedoch in einigen Untersuchungen als Funktion des Rissfortschritts  $\tilde{a}$  angenommen und mit einer Risswiderstandsfunktion  $R$  beschrieben:

$$\mathcal{G}_c = R(\tilde{a}). \quad (2.58)$$

Typischerweise wird ein Ansteigen der Bruchzähigkeit mit zunehmendem Rissfortschritt beobachtet Broberg (1999). Die Darstellung der R-Kurve erfolgt mit Näherungsfunktionen, die an Experimente angepasst werden müssen.

Ob ein Risswachstum stabil ist, hängt demnach nicht nur von der Änderung der Energiefreisetzungsrate, sondern auch von der Änderung der Bruchzähigkeit ab. Stabiles Risswachstum liegt vor, wenn (Anderson, 2005)

$$\mathcal{G} = R \quad \wedge \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a} \leq \frac{\partial R}{\partial a}. \quad (2.59)$$

Dann muss die Belastung weiter gesteigert werden, um einen weiteren Rissfortschritt zu erzeugen. Instabiles Risswachstum liegt vor, wenn

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a} > \frac{\partial R}{\partial a}. \quad (2.60)$$

Dann kommt es zu einer instabilen, dynamischen Ausbreitung des Risses.<sup>5</sup> Kommt der Riss wieder zum Stillstand, nennt man dies *Rissarrest*.

<sup>5</sup>An dieser Stelle sei angemerkt, dass verschiebungsgesteuerte Belastungen ein wesentlich günstigeres Stabilitätsverhalten zeigen als kraftgesteuerte Lasten.



## 2.4 Finite Bruchmechanik

In diesem Abschnitt soll eine Übersicht über die Hintergründe und theoretischen Grundlagen der Finiten Bruchmechanik gegeben werden. Diese stellt eine neue Methode der Bruchmechanik dar und ist bisher nicht umfassend in Lehr- oder Fachbüchern dargestellt. Es wird daher versucht einen möglichst umfassenden Überblick über die Zusammenhänge zu geben und eine einheitliche Schreibweise zu verwenden, die eine ingenieurmäßige Umsetzung leicht erlaubt.

### 2.4.1 Hintergrund

Im Vorangegangenen wurden die Festigkeitsmechanik und die Bruchmechanik als Werkzeug für die Bewertung von Versagen vorgestellt. Die Grenzen der Kriterien werden bei der Betrachtung von Spannungskonzentrationen, die eine schwache Spannungssingularität aufweisen, sichtbar. In der Nähe dieser Spannungskonzentrationen zeigen die Spannungen folgendes singuläre Verhalten:

$$\sigma \propto \frac{1}{r^{1-\lambda}} \quad \text{mit} \quad 0 < (1 - \lambda) < 1/2. \quad (2.61)$$

Beispiele für solche Struktursituationen sind konstruktiv bedingte Kerben, Bi-Materialpunkte in Klebverbindungen oder Schichtübergänge an freien Rändern von Laminaten (Laminatrand- oder -eckeneffekt). Eine Auswertung eines Festigkeitskriteriums wird aufgrund der Spannungssingularität unabhängig von der gewählten Versagenshypothese und der Festigkeit ergeben, dass eine beliebig kleine Last zu Versagen führt. Für eine bruchmechanische Bewertung muss die Energiefreisetzungsrate eines infinitesimalen Risses, der von der Spannungskonzentration ausgeht, betrachtet werden. Wertet man dazu das virtuelle Risssschließintegral (2.48) mit der Nahfeldlösung der Spannungen an der Kerbe (2.46) und der Nahfeldlösung der Verschiebungen an der Risssspitze (2.41) aus, ergibt sich für die differentielle Energiefreisetzungsrate:

$$\begin{aligned} \sigma &\propto \frac{1}{r^{1-\lambda}} \\ \mathbf{u} &\propto r^{1/2} \\ \mathcal{G} &\propto \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} r^{\lambda-1} r^{1/2} dr \\ &\propto \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \left[ r^{\lambda+1/2} \right]_0^{\Delta a} \\ &\propto \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta a^{\lambda+1/2}}{\Delta a} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \Delta a^{\lambda-1/2}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Also ist die differentielle Energiefreisetzungsrates an schwachen Singularitäten mit  $\lambda > 1/2$  null.<sup>6</sup> Eine Auswertung des Griffithschen Kriteriums (2.49) ergibt also unabhängig von der Bruchzähigkeit unendlich hohe Versagenslasten. Wie auch die gegenteilige Aussage der Festigkeitsmechanik widerspricht dieses Ergebnis klar dem realen Verhalten von Strukturen. Klassische Festigkeitsmechanik und Bruchmechanik genügen also nicht für die Bewertung von Versagen ausgehend von schwachen Singularitäten.

Bereits in den Dreißigerjahren des vergangenen Jahrhunderts wurden von Heinz Neuber dazu alternative Kriterien vorgestellt (Neuber, 1933, 1934, 1936) und in den folgenden Jahren verfeinert (Neuber, 1958). Kern seines Kriteriums ist die Betrachtung der Spannung am Kerbgrund über die Länge eines „endlichen Gefügeteilchens“. Diese Länge erlaubt eine Betrachtung der Abminderung der Spannung durch Mikrostützwirkung. Damit übernahm Neuber unwissentlich das bereits von Wieghardt (1907) vorgeschlagene Konzept einer Auswertung der Spannungen in einem gewissen Abstand zum Kerbgrund. Ausgehend von diesem Konzept hat Neuber eine große Anzahl an Formzahlen und Formzahldiagrammen für verschiedene Struktursituationen entwickelt (Neuber, 2000). Seine Methode findet breite Anwendung in der Industrie und hat auch Eingang in Normen gefunden (etwa DIN 743-2 (2012)).

Vergleichbare Ansätze wurden auch von anderen Autoren für verschiedene Materialien und Struktursituationen vorgeschlagen. Für das Versagen ausgehend von elliptischen Löchern in spröden Materialien wurde von Novozhilov (1969) ebenfalls eine gemittelte Auswertung der Spannungen im Bereich hoher Spannungsgradienten vorgeschlagen. Dabei betrachtet er einen Bereich in der Größenordnung der Atomdurchmesser, da dies die Größe sei, die das Versagenverhalten bestimmt. Waddoups et al. (1971) schlägt eine Betrachtung von fiktiven Rissen über den Bereich „intensiver“ Formänderungsenergiegedichte vor und wendet das Konzept an, um den Lochgrößeneffekt in Laminaten zu beschreiben. Dieser experimentell beobachtete Effekt beschreibt die Abhängigkeit der effektiven Festigkeit einer Struktur mit Loch vom Durchmesser des Loches, wenngleich der Spannungskonzentrationsfaktor sich mit dem Lochdurchmesser nicht ändert und die Spannungsfelder selbstähnlich sind. Ebenfalls für das Versagen von Laminaten schlagen Whitney u. Nuismer (1974) eine Auswertung der Spannungen an einem entfernten Punkt von der Spannungskonzentration sowie eine Betrachtung einer gemittelten Spannung vor. Beide Modelle können den in Experimenten beobachteten Lochgrößeneffekt in Laminaten gut beschreiben. Ebenfalls eine Auswertung in einem diskreten Abstand von der Spannungskonzentration wurde von Kinloch u. Williams (1980) vorgeschlagen, um den Einfluss von Plastizität auf die Initiierung von Rissen an Kerben in Polymerwerkstoffen zu beschreiben. Novozhilovs Analyse wurde von Seweryn (1994) aufgegriffen, um das spröde Versagen in V-Kerben zu untersuchen, und von Grenstedt et al. (1996) genutzt, um die Initiierung von Rissen in gekerbten PVC-Schaumproben zu bewerten. Auch für die Initiierung von Rissen

---

<sup>6</sup>Vgl. Leguillon (1999)

an Bimaterialpunkten wurde das Novozilov/Seweryn-Kriterium eingesetzt (Grenstedt u. Hallstrom, 1997). Das Konzept von Waddoups wurde von El Haddad et al. (1980) auf die Bewertung von Rissen unter zyklischer Last herangezogen. Auf Basis bruchmechanischer Überlegungen wurde von Leblond u. Mouro (1999, 2000a,b) ein Konzept zur Rissinitiierung an Kerben entwickelt, das von einem fiktiven (*pre-existing*) Defekt im Kerbgrund ausgeht.

All diese Ansätze lassen sich in die Gruppe der Theorien kritischer Distanzen<sup>7</sup> oder als Methode imaginärer Risse<sup>8</sup> einordnen. Taylor (2007) gibt eine umfassende Übersicht über die Theorie der kritischen Distanzen sowie deren Umsetzungen<sup>9</sup>. Per definitionem wird in diesen statt einer lokalen Auswertung der maximalen Spannung eine Auswertung in einem Abstand (Point Method (PM)), eine Auswertung der gemittelten Spannung über eine Länge (Line Method (LM)), eine Fläche oder ein Volumen betrachtet. Bei all diesen Verfahren wird immer ein Längenparameter eingeführt. Allerdings kann kein physikalischer Zusammenhang dieses Längenparameters mit Material- oder Strukturparametern angegeben werden. Für den Fall eines Risses im unendlichen Körper zeigt Taylor (2007) einen Zusammenhang dieses Längenparameters mit der Festigkeit und Bruchzähigkeit, der an Hand eines Risses im unendlichen Körper bestimmt wird:

$$l = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_c}{\sigma_c} \right)^2. \quad (2.63)$$

Dieser Längenparameter, welcher der von Irwin eingeführten Größe der plastischen Zone um die Risssspitze, der sogenannten Irwin-Länge (Gross u. Seelig, 2011), entspricht, ist allerdings nur für den Fall eines Risses gültig. Bei anderen Struktursituationen führt Taylor (2007) einen Vorfaktor ein, der von der Geometrie und Belastung abhängt. Dieser Vorfaktor muss jedoch weiterhin für jede Struktursituation in entsprechenden Experimenten ermittelt werden. Clark u. McGregor (1993) wenden die Theorie kritischer Distanz auf Klebverbindungen an und verwenden dabei eine Mittelung der Spannung über eine kritische Zone. Sie vermuten, dass es einen bruchmechanischen Zusammenhang für die Größe der kritischen Zone gibt.

Einen wichtigen Hinweis für die gleichzeitige Bedeutung von Spannungs- und Energiebedingung lieferte die Arbeit von Parvizi et al. (1978). In dieser Arbeit wurden  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ -Kreuzverbundlaminat mit uniaxialer Belastung in  $0^\circ$ -Richtung experimentell untersucht. Die Dicke der mittleren  $90^\circ$ -Schicht wurde variiert. Es wurde beobachtet, dass die Dicke die Entstehung von Rissen entscheidend kontrolliert und bei sehr dünnen Schichten ein Reißen der  $90^\circ$ -Schicht vollständig

<sup>7</sup>Engl.: Theory of Critical Distances

<sup>8</sup>Engl.: Imaginary Crack Method

<sup>9</sup>An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass einige Strukturanalysen in der industriellen Praxis mit der Finite-Elemente-Methode unbeabsichtigt ebenfalls dem Konzept der Theorie der kritischen Distanzen folgen. Um dem Problem nicht-konvergenter Spannungen an Spannungssingularitäten Rechnung zu tragen, wird bisweilen die Größe der Elemente in der Umgebung von Spannungskonzentrationen festgelegt und die nichtauskonvergierte Spannung mit einem Festigkeitskriterium ausgewertet. Dabei muss der Zusammenhang von Elementgröße und Festigkeit anhand von Experimenten für jede Struktursituation kalibriert werden.

unterdrückt wird. Ist die innere Schicht hinreichend dick, treten die Risse in der mittleren Schicht bei einer konstanten Verzerrung auf. Parvizi et al. (1978) ergänzten eine übliche Spannungsbetrachtung um eine Energiebetrachtung auf Basis eines einfachen Schubdeformationsmodells für die mittlere Schicht. Sie erhalten, unter Annahme eines Risses über die gesamte Dicke, einen Zusammenhang der Versagensspannung  $\sigma_f$  von der Dicke der mittleren Schicht  $t$  der Form  $\sigma \propto 1/\sqrt{t}$ . Dabei sind beide Versagensbedingungen notwendige Bedingungen, jedoch nicht miteinander verknüpft. Die Auswertung zeigt eine gute Übereinstimmung mit Experimenten.

Bereits von Waddoups et al. (1971) wurde vermutet, dass der Bruchprozess in diskreten Schritten abläuft. Doch seine Annahme, dass dabei Rissinkremente in der Größenordnung von Atomdurchmessern auftreten, ist für die meisten Struktur-situation nicht korrekt. Lediglich bei der Untersuchung von Carbonnanotubes oder sehr dünnen Filmen kann diese Annahme gültig sein (Pugno u. Ruoff, 2004). In der Arbeit von Hashin (1996) wird Mikrorissbildung in Laminaten untersucht und dabei der Rahmen für die *Finite Bruchmechanik* gelegt. Er modelliert dabei das Entstehen von Rissen als diskrete Bruchvorgänge (*fracture events*).

Von Francfort u. Marigo (1998) und Bourdin et al. (2008) wurde eine Variationsformulierung des Griffithschen Kriteriums vorgeschlagen. Es stellt eine komplette, mathematisch vollständige Formulierung von Rissvorgängen in elastischen Körpern unter quasistatischer Belastung dar. Es basiert auf dem Prinzip der minimalen Gesamtenergie eines Körpers mit beliebiger Risskonfiguration, wobei sich die Rissenergie, wie bei Griffith, als Produkt der Rissoberfläche und der Bruchzähigkeit ergibt. Rissinitiierung kann ebenso abgebildet werden wie Rissverzweigung oder -vereinigung, wobei keine zusätzlichen Kriterien notwendig sind. Die Risskonfiguration folgt streng nach dem Prinzip der minimalen Gesamtenergie, wobei ein Wiederverbinden von gerissener Struktur (Heilen von Rissen) ausgeschlossen wird. Von Bourdin et al. (2000) und Bourdin (2007) wurde eine diskretisierte Form des von Francfort u. Marigo (1998) eingeführten Funktionals vorgeschlagen und ein numerischer Lösungsweg vorgestellt. Francfort u. Marigo (1998) untersuchen in ihrer Analyse auch den Fall der Rissinitiierung ausgehend von Spannungskonzentrationen. Sie zeigen in einem vollständigen Beweis, dass es bei schwachen Singularitäten oder nicht-singulären Spannungskonzentrationen zur Initiierung von finiten Rissen kommt.<sup>10</sup>

Für eine numerische Umsetzung der Variationsformulierung des Griffithschen Kriteriums nach Francfort u. Marigo (1998) wurden mehrere Phasenfeldmodelle vorgeschlagen (Aranson et al., 2000, Karma et al., 2001, Spatschek et al., 2006, Kuhn u. Müller, 2010, Miehe et al., 2010). Diese Phasenfeldmodelle sind mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode umgesetzt, wobei das Vorhandensein eines Risses als zusätzlicher Freiheitsgrad in den Knoten eingeführt wird. Für die diskretisierte Darstellung der Risse im Phasenfeld wird ein Längenparameter  $\epsilon$  eingeführt, der die Breite des Risses darstellt. Von mehreren Autoren wurde ein Zusammenhang dieses

<sup>10</sup>Sie bezeichnen diesen Vorgang als „brutal crack growth“.

Regularisierungsparameters und der Festigkeit gefunden (Kuhn, 2013, Borden et al., 2012). Die Ergebnisse zeigen, dass der Regularisierungsparameter proportional zu der Größen der plastischen Zone nach Irwin (vgl. Gleichung (2.63)) ist:

$$\epsilon \propto \frac{E\mathcal{G}_c}{\sigma_c^2}. \quad (2.64)$$

Bei quasistatischer Betrachtung zeigen Phasenfeldmodelle ebenfalls das Auftreten finiter Risse bei der Untersuchung von Rissinitiierung. Es wurden mehrere Erweiterungen der Phasenfeldmodelle auf elasto-dynamische Bruchvorgänge entwickelt (Karma et al., 2001, Borden et al., 2012, Kuhn et al., 2013). Kuhn et al. (2013) zeigen, dass in diesen dynamischen Phasenfeldmodellen Rissinitiierung als kontinuierlicher Vorgang beschrieben wird. Die entsprechende Rissgeschwindigkeit ist sehr groß, liegt aber immer unter der in Experimenten nachgewiesenen maximalen Rissgeschwindigkeit von 60% der Rayleigh-Geschwindigkeit.<sup>11</sup> Insgesamt stellen Phasenfeldmodelle für Bruchvorgänge ein sehr interessantes Verfahren für die Untersuchung von komplexen Rissproblemen dar. Gegenüber anderen numerischen Verfahren zur Untersuchung von Rissen, wie etwa Kohäsivzonenmodellen in der Finite-Elemente-Methode oder der eXtended-Finite-Elemente-Method (XFEM), können Rissverzweigungen und -vereinigungen direkt abgebildet werden. Jedoch können nur für sehr einfache Sonderfälle geschlossen-analytische Lösungen angegeben werden und die numerische Auswertung ist bisweilen noch mit großem Rechenaufwand verbunden.

### 2.4.2 Gekoppeltes Spannungs- und Energiekriterium

Dem Konzept von Hashin (1996) folgend wurde von Leguillon (2002) ein gekoppeltes Spannungs- und Energiekriterium vorgeschlagen, das im Sinne der *Finiten Bruchmechanik* diskrete Bruchvorgänge vorsieht. Es wird die instantane Entstehung eines Risses endlicher Größe  $\Delta A$  vorhergesagt, wenn ein Spanningskriterium und ein Energiekriterium erfüllt sind. Dabei erfolgt eine nicht-lokale Auswertung der Spannungen an der Spannungskonzentration. Das Spanningskriterium muss im ungerissenen Zustand über die gesamte Fläche des finiten Risses erfüllt sein:

$$f(\sigma_{ij}(\mathbf{x})) \geq \sigma_c \forall \mathbf{x} \in \Omega_c. \quad (2.65)$$

Dabei steht  $f$  für ein entsprechend gewähltes Festigkeitskriterium und  $\Omega_c$  bezeichnet die Oberfläche des betrachteten Risses der Größe  $\Delta A$ .

Gleichzeitig muss die Entstehung des finiten Risses auch das Griffithsche Bruchkriterium erfüllen. Die freigesetzte Energie muss also größer oder gleich der für das Bruchgeschehen benötigten Energie sein. Betrachtet man den Energieerhaltungssatz, erhält man folgende Bedingung für ein rein mechanisch belastetes System:

$$\Delta \Pi + \Delta K + \mathcal{G}_c \Delta A = 0. \quad (2.66)$$

<sup>11</sup>Die Rayleigh-Geschwindigkeit ist die Geschwindigkeit von Oberflächenwellen, die bei dynamischen Rissproblemen eine wichtige Rolle spielen.

Dabei wird, wie in der Bruchmechanik üblich, ein linearer Zusammenhang der für die Rissentstehung benötigten Energie und der Rissgröße angenommen. Ist der ungerissene Körper in Ruhe, kann die kinetische Energie nur wachsen,  $\Delta K \geq 0$ , und man erhält folgende Bedingung für die Initiierung eines finiten Risses:

$$-\frac{\Delta \Pi(\Delta A)}{\Delta A} \geq \mathcal{G}_c. \quad (2.67)$$

Im Folgenden erfolgt eine Konzentration auf zweidimensionale Modellbildung. Es gilt also  $\Delta A = b\Delta a$ , wobei  $b$  die Tiefe der Struktur ist. Es sei nun die *inkrementelle Energiefreisetzungsrates*  $\bar{\mathcal{G}}_c$  eingeführt, die sich aus der Mittelung der differentiellen Energiefreisetzungsrates über die finite Risslänge ergibt:

$$\bar{\mathcal{G}} = \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} \mathcal{G}(\tilde{a}) d\tilde{a}. \quad (2.68)$$

Damit lässt sich für den Fall eines finiten Risses der Länge  $\Delta a$  analog zum Griffithschen Bruchkriterium für infinitesimale Risse ein Bruchkriterium angeben:

$$\bar{\mathcal{G}}(\Delta a) \geq \mathcal{G}_c. \quad (2.69)$$

Ist die inkrementelle Energiefreisetzungsrates als Funktion der Risslänge bekannt, lässt sich durch Ableitung die differentielle Energiefreisetzungsrates ermitteln:

$$\mathcal{G}(\Delta a) = \frac{d}{d\Delta a} (\Delta a \bar{\mathcal{G}}(\Delta a)) = \bar{\mathcal{G}}(\Delta a) + \Delta a \frac{\partial \bar{\mathcal{G}}(\Delta a)}{\partial \Delta a}. \quad (2.70)$$

Alternativ kann das Energiekriterium auch mit dem Spannungsintensitätsfaktor dargestellt werden:

$$\frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} K_I^2 d\tilde{a} = K_{Ic}^2. \quad (2.71)$$

Dies ist insbesondere dann vorteilhaft, wenn der Spannungsintensitätsfaktor der jeweiligen Struktursituation mit Riss bekannt ist.

Nach Leguillon (2002) sind beide Kriterien (2.65) und (2.69) notwendige Bedingungen für die Entstehung eines Risses und müssen gleichzeitig erfüllt sein:

$$f(\sigma_{ij}(\mathbf{x})) \geq \sigma_c \forall \mathbf{x} \in \Omega_c(\Delta a) \quad \wedge \quad \bar{\mathcal{G}}(\Delta a) \geq \mathcal{G}_c. \quad (2.72)$$

Dies wird als das gekoppelte Spannungs- und Energiekriterium von Leguillon bezeichnet (auch hybrides Kriterium genannt (Hebel, 2010, Gross u. Seelig, 2011)). Es umfasst im Sonderfall homogener Spannungsfelder (bei ausreichender Größe der umgebenden Struktur) die Festigkeitsmechanik.

Von Cornetti et al. (2006) wurde eine alternative Formulierung des gekoppelten Kriteriums vorgeschlagen, in welcher statt einer punktwweisen Auswertung der Spannung eine Auswertung der gemittelten Spannung erfolgt:

$$\frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} f(\sigma_{ij}(\tilde{x})) d\tilde{x} \geq \sigma_c \quad \wedge \quad \bar{\mathcal{G}}(\Delta a) \geq \mathcal{G}_c. \quad (2.73)$$

Analog zur Theorie kritischer Distanzen (Taylor, 2007) wird diese Form der Auswertung auch *Line-Method* genannt.

Von Catalanotti u. Camanho (2013) wurde vorgeschlagen, in der Formulierung des gekoppelten Kriteriums eine Berücksichtigung der R-Kurve (2.58) vorzusehen. Dann nimmt das Energiekriterium (2.69) folgende Form an:

$$\bar{\mathcal{G}}(\Delta a) \geq \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} R(\tilde{a}) d\tilde{a}. \quad (2.74)$$

In den gekoppelten Kriterien sind die Belastung bei Rissinitiiierung sowie die Größe des finiten Risses unbekannte Größen. Sie ergeben sich aus der Lösung des Ungleichungssystems. Im allgemeinen Fall muss dazu ein entsprechendes Optimierungsproblems gelöst werden. Angenommen, die Belastung der Struktur ist durch einen skalaren Lastparameter  $F$  (im Folgenden Last genannt) bestimmt, ergibt sich das folgende Optimierungsproblem: Bestimme die kleinste Last  $F$ , die beide Teilkriterien des gekoppelten Kriteriums, unter Berücksichtigung aller kinematisch möglichen Risskonfigurationen, erfüllt. Im Falle der Formulierung des gekoppelten Kriteriums von Leguillon (2.72) ergibt sich damit das folgende Optimierungsproblem zur Bestimmung der kritischen Last  $F$ :

$$F_f = \min \{ F \mid f(\sigma_{ij}(\mathbf{x})) \geq \sigma_c \forall \mathbf{x} \in \Omega_c(\Delta a) \wedge \bar{\mathcal{G}}(\Delta a) \geq \mathcal{G}_c \}. \quad (2.75)$$

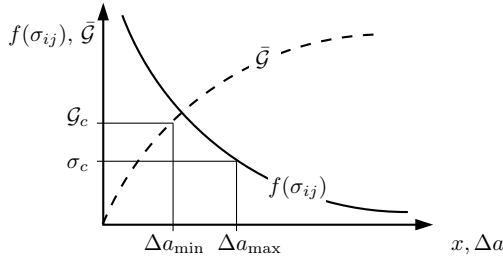
Meist zeigen die Funktion der Spannungen  $f(\sigma_{ij}(\mathbf{x}))$  und die inkrementelle Energiefreisetzungsrates  $\bar{\mathcal{G}}(\Delta a)$  im relevanten Nahbereich der Spannungskonzentration ein monotonen Verhalten.<sup>12</sup> Dann können anstelle der Ungleichungen in den Formulierungen des gekoppelten Kriteriums (2.72) Gleichungen geschrieben werden:

$$f(\sigma_{ij}(\Delta a)) = \sigma_c \quad \wedge \quad \bar{\mathcal{G}}(\Delta a) = \mathcal{G}_c \quad (2.76)$$

$$\text{bzw.} \quad \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} f(\sigma_{ij}(\tilde{x})) d\tilde{x} = \sigma_c \quad \wedge \quad \bar{\mathcal{G}}(\Delta a) = \mathcal{G}_c. \quad (2.77)$$

Aus der Betrachtung der monoton fallenden Spannungsfunktion ergibt sich dann eine obere Grenze der möglichen finiten Risslängen. Eine untere Grenze der finiten

<sup>12</sup>Nach Bazant u. Planas (1997) werden solche Geometrien als positive Geometrien bezeichnet.



**Abbildung 2.4:** Darstellung der Restriktionen des Optimierungsproblems (2.75) des gekoppelten Kriteriums im Falle monotonen Verhaltens der Spannungsfunktion und der inkrementellen Energiefreisetzungsrate in direkter Umgebung der Spannungskonzentration.

Risslängen ergibt sich aus der monoton steigenden inkrementellen Energiefreisetzungsrate. In Abbildung 2.4 sind die Restriktionen des Optimierungsproblems (2.75) dargestellt. Die geringste Last, die beide Kriterien erfüllt, ist gefunden, wenn die obere und untere Grenze der finiten Risslängen übereinstimmen. In Abbildung 2.4 liegt die Belastung der Struktur über der Versagenslast, die sich aus der Lösung des Optimierungsproblems ergibt.

Es sei darauf hingewiesen, dass die Risskonfiguration, die sich aus der Lösung des Optimierungsproblems des gekoppelten Kriteriums ergibt, nicht zwangsläufig ein einzelner Riss sein muss. Es kann auch die gleichzeitige Initiierung mehrerer Risse als Rissmuster auftreten. Etwa werden bei der Initiierung von Rissen an Kreislöchern unter einachsigen Zug (Camanho et al., 2012) oder unter Innendruck (Geipel, 2014) symmetrische Risse an beiden Seiten des Loches auftreten. Während im Falle einachsigen Zuges Symmetriebetrachtungen genügen, kann dieser Effekt im Falle einer Innendruckbelastung durch eine Betrachtung der Energiefreisetzungsrate der möglichen Risskonfigurationen erklärt werden. Eine Betrachtung verfügbarer Analysen der Spannungsintensitätsfaktoren (Tada et al., 2000) zeigt, dass eine Risskonfiguration mit zwei gegenüberliegenden Rissen mehr Energie freisetzt als eine Risskonfiguration mit einem einzelnen Riss oder mit mehr als zwei Rissen.<sup>13</sup> Denkbar ist bei entsprechender Belastung auch die gleichzeitige Initiierung zweier ungleicher, finiter Risse.

<sup>13</sup>Dieses Ergebnis ist in der Masterarbeit von Geipel (2014) ausführlich dargestellt. Dabei wird gezeigt, dass in diesem Fall aufgrund einer zu gering ausgeprägten Spannungskonzentration die Ergebnisse der Festigkeitsmechanik und die der Auswertung des gekoppelten Kriteriums übereinstimmen.



### 2.4.3 Analyse des Einzelrisses

Im Folgenden soll nun das kanonische Problem der Bruchmechanik – der Einzelriss der Länge  $2a$  im unendlichen Körper unter uniaxialem Zug  $\sigma$  – mit der Finiten Bruchmechanik untersucht werden. Für die Auswertung des gekoppelten Kriteriums kann dazu die Westergaard-Lösung für den Einzelriss (2.38, 2.39) eingesetzt werden. Da die Spannungen und die Energiefreisetzungsrate monotone Funktionen sind, gelten die Formulierungen (2.76) bzw. (2.77). Nach Auswertung der Spannungen und des Spannungsintensitätsfaktors erhält man für die Formulierung mit Point-Method (2.76)

$$\sigma \frac{a + \Delta a}{\sqrt{\Delta a (2a + \Delta a)}} = \sigma_c \quad \wedge \quad \pi \sigma^2 \left( a + \frac{\Delta a}{2} \right) = K_{Ic}^2 \quad (2.78)$$

bzw. für die Line-Method (2.77)

$$\sigma \sqrt{1 + 2 \frac{a}{\Delta a}} = \sigma_c \quad \wedge \quad \pi \sigma^2 \left( a + \frac{\Delta a}{2} \right) = K_{Ic}^2 \quad (2.79)$$

Beide Gleichungssysteme lassen sich analytisch lösen und man erhält für die kritische Fernfeldspannung und die finite Risslänge im Fall der Point-Method

$$\Delta a = \frac{a}{3} \left( 4 \left( \frac{r_p}{a} - 1 \right) + \frac{2 \cdot 2^{3/2} \left( 1 - 2 \frac{r_p}{a} + 4 \left( \frac{r_p}{a} \right)^2 \right)}{\sqrt[3]{\omega}} + \sqrt[3]{2\omega} \right), \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} \sigma_f^{\text{PM}} &= \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi a}} \frac{1}{\sqrt[4]{36 \frac{r_p}{a} \omega^2}} \left( 256 \left( \frac{r_p}{a} \right)^{\frac{7}{2}} - 32 \left( \frac{r_p}{a} \right)^{\frac{5}{2}} \left( 6 + \sqrt[3]{2\omega} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\rho} \left( \sqrt[3]{2\omega} - 2 \right) \left( \sqrt[3]{2\omega} \left( \sqrt{3} + 4 \frac{r_p}{\rho} \right) - 16 \frac{r_p}{\rho a} \right) \right. \\ &\quad \left. - 4 \frac{r_p}{a} \sqrt{\rho} \left( \sqrt[3]{2\omega} - 6 \right) \left( \sqrt{3} + 5 \sqrt{\frac{r_p}{\rho a}} + 2 \sqrt[3]{2\omega} \sqrt{\frac{r_p}{\rho a}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.81)$$

mit

$$\rho = 8 - 13 \frac{r_p}{a} + 16 \left( \frac{r_p}{a} \right)^2, \quad (2.82)$$

$$\omega = 4 + 15 \frac{r_p}{a} - 24 \left( \frac{r_p}{a} \right)^2 + 32 \left( \frac{r_p}{a} \right)^3 - 3\sqrt{3} \sqrt{\frac{r_p}{a} \left( 8 - 13 \frac{r_p}{a} + 16 \left( \frac{r_p}{a} \right)^2 \right)} \quad (2.83)$$

bzw. im Fall der Line-Method, die deutlich kompaktere Lösung<sup>14</sup>

$$\Delta a^{\text{LM}} = 4r_p, \quad (2.84)$$

<sup>14</sup>Man beachte hierbei die Ähnlichkeit des Ausdrucks der Versagenslast (2.85) mit dem Ergebnis der Irwinschen Risslängenkorrektur (2.57).

$$\sigma_f^{\text{LM}} = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi a}} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \frac{r_p}{a}}} \right). \quad (2.85)$$

Betrachtet man perfekt sprödes Material – also  $r_p/a \rightarrow 0$  – nehmen die Klammerausdrücke der Ergebnisse der kritischen Spannungen jeweils den Wert eins an und die Versagenslasten gehen in beiden Fällen in den Wert der linear elastischen Bruchmechanik

$$\sigma_f^{\text{LEBM}} = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi a}} \quad (2.86)$$

über. Derweil ergeben sich für die finite Risslänge folgende Werte:

$$\lim_{r_p/a \rightarrow 0} \Delta a^{\text{PM}} = r_p, \quad (2.87)$$

$$\lim_{r_p/a \rightarrow 0} \Delta a^{\text{LM}} = 4r_p. \quad (2.88)$$

Daraus zu schlussfolgern, dass dies ein Wachsen des Risses in finiten Schritten darstellt, wäre jedoch falsch. Vielmehr muss die relative Verlängerung des Risses betrachtet werden, die entsprechend der Forderung perfekter Sprödigkeit verschwindet:

$$\lim_{r_p/a \rightarrow 0} \frac{\Delta a^{\text{PM}}}{a} = \lim_{r_p/a \rightarrow 0} \frac{r_p}{a} = 0 \quad (2.89)$$

$$\lim_{r_p/a \rightarrow 0} \frac{\Delta a^{\text{LM}}}{a} = \lim_{r_p/a \rightarrow 0} 4 \frac{r_p}{a} = 0. \quad (2.90)$$

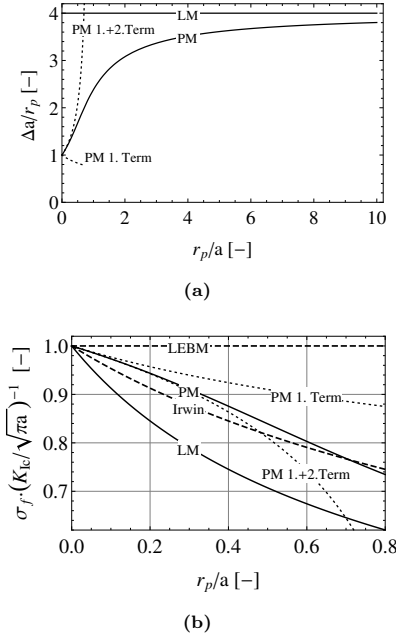
Also gehen beide Formulierungen der Finiten Bruchmechanik bei perfekt sprödem Materialverhalten vollständig in die linear elastische Bruchmechanik über.

Betrachtet man anstelle der Westergaard-Lösung die zuvor dargestellte Reihenentwicklung derselbigen (2.40), so lässt sich auch für die Formulierung des gekoppelten Kriteriums mit der Point-Method eine kompakte Lösung angeben. Man erhält dann bei Betrachtung des ersten Terms (T1) bzw. der ersten beiden Terme (T2) folgende Ergebnisse:

$$\Delta a^{\text{PM, T1}} = r_p \frac{\sqrt{1 + 2 \frac{r_p}{a}} - 1}{\frac{r_p}{a}}, \quad (2.91)$$

$$\sigma_f^{\text{PM, T1}} = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\left( \frac{a}{r_p} \right)^2 + 2 \frac{a}{r_p} - \frac{a}{r_p}}, \quad (2.92)$$

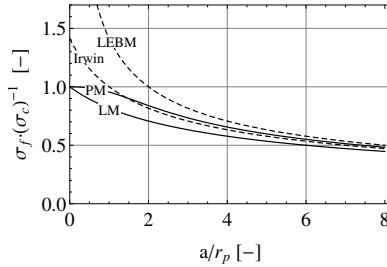
$$\Delta a^{\text{PM, T2}} = r_p \frac{4 \left( 2 \sqrt{1 - \frac{r_p}{a}} + 3 \frac{r_p}{a} - 2 \right)}{\frac{r_p}{a} (8 - 9 \frac{r_p}{a})}, \quad (2.93)$$



**Abbildung 2.5:** Riss unter einachsiger Belastung im unendlichen Körper: Auswertung mit dem gekoppelten Kriterium für den Übergang zu sprödem Verhalten. Dargestellt sind die Ergebnisse der Formulierung mit Point-Method (PM) und Line-Method (LM) im Vergleich zur linear elastischen Bruchmechanik (LEBM) und der Irwinschen Risslängenkorrektur.

$$\sigma_f^{\text{PM, T2}} = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\sqrt{\left(\frac{a}{r_p}\right)^2 - \frac{a}{r_p} - \frac{a}{r_p} + \frac{3}{4}}}. \quad (2.94)$$

Selbstredend zeigen all diese Lösungen das gleiche Verhalten im Grenzübergang zu perfekt sprödem Materialverhalten. Ihre Gültigkeit ist jedoch auf sehr kleine Werte von  $r_p/a$  beschränkt. Abbildung 2.5(a) zeigt den Vergleich der Risslösungen für unterschiedliche Verhältnisse der Größe der plastischen Zone zur Länge des Risses, also der Größe, die die Sprödigkeit quantifiziert. Diese Betrachtung zeigt den stark beschränkten Gültigkeitsbereich der Lösung mit Hilfe der Reihenentwicklung. In analoger Weise ist in Abbildung 2.5(b) die Versagenslast der beiden Formulierungen des gekoppelten Kriteriums gezeigt und den Ergebnissen der linear elastischen Bruchmechanik und der Irwinschen Risslängenkorrektur gegenübergestellt. Die Ver-



**Abbildung 2.6:** Riss unter einachsiger Belastung im unendlichen Körper: Auswertung mit dem gekoppelten Kriterium für den Übergang zu duktilem Verhalten.

sagenslast ist hierbei mit der kritischen Last der linear elastischen Bruchmechanik normiert.

Das Verhalten der dargestellten Lösung beim Übergang zu duktilem Versagen ist in Abbildung 2.6 dargestellt. Während sich aus der linear elastischen Bruchmechanik eine unendlich hohe Versagenslast ergibt, gehen beide Formulierungen des gekoppelten Kriteriums kontinuierlich in die Festigkeitsmechanik über. Wie schon bei der Betrachtung des Übergangs zu duktilem Verhalten (Abbildung 2.5(b)) liegen die Ergebnisse der Irwinschen Korrektur zwischen denen der Auswertung des gekoppelten Kriteriums mit Point- und Line-Method. Lediglich für sehr kleine Werte von  $a/r_p$  ergeben sich deutlich unterschiedliche Werte mit einer Überschätzung um 41%. Dies ist insbesondere beachtenswert, da die Irwinsche Risslängenkorrektur auf starken Vereinfachungen und der nur sehr lokal gültigen asymptotischen Lösung basiert.

Analysen des Risses im unendlichen Körper mit Hilfe des gekoppelten Kriteriums wurden bereits von Cornetti et al. (2006) mit der Line-Method und von Mantič (2009) mit der Point-Method dargestellt. In diesen Analysen ist jedoch keine geschlossene Lösung für die Auswertung der Point-Method dargestellt und kein Vergleich der Lösungen untereinander sowie mit der Irwinschen Risslängenkorrektur vorgenommen. Der Vergleich in der Arbeit von Cornetti et al. (2014) zeigt, dass die Auswertung des gekoppelten Kriteriums mit Point-Method eine sehr gute Übereinstimmung mit einer Dugdale-Formulierung zeigt.

#### 2.4.4 Anwendungen der Finiten Bruchmechanik

Seit der Formulierung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums von Leguillon (2002) wurde es für die Analyse verschiedenster Struktursituationen eingesetzt. Eine Untersuchung einer 3-Punkt-Biege-Probe wurde von Cornetti et al. (2006) und Leguillon et al. (2007) vorgeschlagen. Die Ergebnisse zeigen, dass der in experimentellen Untersuchungen mit Proben aus Polymethylmethacrylat (PMMA) und hochfestem Beton festgestellte Größeneffekt korrekt abgebildet werden kann. Die Rissinitiierung ausgehend von einem V-Kerb wurde von Carpinteri et al. (2011) untersucht. Eine Erweiterung auf allgemeine Mixed-Mode-Belastung wurde von Cornetti et al. (2013) vorgesehen. Eine Analyse dieser Modelle für den V-Kerb und ein Vergleich der beiden Formulierungen des gekoppelten Kriteriums wurde von Lazzarin et al. (2002) durchgeführt. Eine Betrachtung von Kerben mit Rundungsradius im Kerbgrund (sog. U-Kerben) wurde von Yosibash et al. (2004), Priel et al. (2008) und Carpinteri et al. (2012) durchgeführt.

Eine Analyse von Rissinitiierung durch Spannungskonzentrationen mit schwachen Singularitäten infolge des Laminatrandeffekts wurde von Hebel et al. (2010) und Martin et al. (2010) vorgeschlagen. Dabei wurden Kreuz- und Winkelverbunde untersucht und eine gute Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen gezeigt.

Ebenfalls mit dem gekoppelten Kriterium untersucht wurde die Rissinitiierung in gekerbten Laminaten (Andersons et al., 2010, Modniaks et al., 2014). Die Rissinitiierung in Laminaten mit Einzelloch unter uniaxialer Zugbelastung wurde von Li u. Zhang (2006), Hebel u. Becker (2008), Martin et al. (2012) und Camanho et al. (2012) studiert. Dabei wurde von Camanho et al. (2012) ein Vergleich mit Experimenten sowie mit in der Luftfahrt verwendeten Methoden der Theorie der kritischen Distanz zur Abschätzung der Festigkeit von gekerbten Laminaten durchgeführt. Die Ergebnisse zeigen, dass der Lochgrößeneffekt korrekt abgebildet werden kann und im Vergleich zu den anderen Methoden keine Längenparameter kalibriert werden müssen.

Eine Erweiterung auf elliptische Löcher wurde vom Autor dieser Arbeit in Zusammenarbeit mit D. Geipel entwickelt (Weißgraeber et al., 2014b). Die Ergebnisse zeigen, dass der Größeneffekt entscheidend vom Verhältnis der Halbachsen dominiert wird. Die Analyse der Ellipse erlaubt in Grenzfällen die Abbildung eines homogenen Spannungszustandes und eines Risses. Die Anwendung der Finiten Bruchmechanik beschreibt einen kontinuierlichen Übergang von Festigkeitsmechanik zur klassischen Bruchmechanik.

In der Arbeit von Catalanotti u. Camanho (2013) wurde die Rissinitiierung ausgehend von Bolzenverbindungen in Laminaten analysiert. Dabei wurde die Formulierung des gekoppelten Kriteriums mit R-Kurve (2.74) eingeführt.<sup>15</sup>

<sup>15</sup>In der Masterarbeit von Geipel (2014) wurde diese Strukturanalyse detailliert studiert. Vernachlässigt man die R-Kurve und wertet mit konstanter Bruchzähigkeit aus, so ergeben sich

Eine asymptotische Analyse von Strukturen mit Klebschichten wurde von Leguillon et al. (2003) vorgeschlagen. Eine Erweiterung auf Mixed-Mode-Belastung und ein Vergleich mit experimentellen Ergebnissen wurde von García u. Leguillon (2012) und Tran et al. (2012) dargestellt. Das Ablösen von verklebten Faserkunststoffverbund-Verstärkungspflastern auf Betonträgern wurde von Carpinteri et al. (2009) und Cornetti et al. (2012) analysiert und der auftretende Größeneffekt diskutiert. Dabei wurde eine reine Schubdeformation der dünnen Klebschicht angenommen.

Eine Bewertung von Fügungen in Brennstoffzellen wurde von Müller et al. (2006) und Hebel u. Becker (2008) ausgeführt. Dabei wurde für einen thermomechanischen Lastfall während der Fertigung die Entstehung von Rissen an den freien Rändern eines Brennstoffzellenstacks untersucht. Die Ablösung eines Einschlusses bzw. einer einzelnen Faser in Matrixumgebung unter uniaxialer Zugbelastung wurde von Mantič (2009) betrachtet. Er berücksichtigt dabei die Entstehung von finiten Rissen an der Grenzschicht des Einschlusses. Die Ergebnisse zeigen ebenfalls einen ausgeprägten Größeneffekt.

Von Chiaia et al. (2008) wurde mit dem gekoppelten Spannungs- und Energiekriterium ein Versagensmodell für Schneeblettlawinen entwickelt und zwar mit der Annahme reiner Schubdeformationen in einer dezidierten Schwachschicht<sup>16</sup> in der Schneedecke.<sup>17</sup>

In der zweiteiligen Veröffentlichung von Leguillon u. Martin (2013a,b) wird die Behinderung von Rissausbreitung durch die Schichtung zweier isotroper Körper mit unterschiedlichen Elastizitätsmoduln (elastischer Kontrast) und die damit einhergehende Steigerung der Versagenslast analysiert. Dabei werden verschiedene mögliche Mechanismen zur Überwindung der Grenzschicht umfassend diskutiert. In einer weiteren Arbeit wurde die Entstehung von Rissmustern bei Abkühlungsprozessen mit Hilfe des gekoppelten Kriteriums analysiert (Leguillon, 2013). Dabei wurde gezeigt, dass die Abkühlungsgeschwindigkeit einen Einfluss auf die charakteristische Größe des entstehenden Rissmusters hat.

Insgesamt zeigt sich, dass die Finite Bruchmechanik ein sehr gutes Werkzeug zur Analyse der Rissinitiierung ist. Auch bei Betrachtung nichtsingulärer Spannungs-konzentrationen ergeben sich sehr gute Ergebnisse. Die Auswertung gekoppelter Spannungs- und Energiekriterien im Rahmen der Finiten Bruchmechanik bildet etwaig auftretende Größeneffekte korrekt ab. Dabei wird kein empirischer Längenparameter verwendet. Es werden nur die grundlegenden Materialkennwerte Festigkeit und Bruchzähigkeit für eine Auswertung benötigt.

---

größere Versagenslasten, die maximal um 5% abweichen.

<sup>16</sup> Etwa infolge von Oberflächenreif oder aufbauender Umwandlung von Schneekristallen.

<sup>17</sup> Einen interessanteren Ansatz für die Berechnung der Auslöselasten stellt das Modell von Heierli et al. (2011) dar, das mit einem anderen physikalischen Konzept der Auslösung arbeitet (Heierli et al., 2008). Dabei wird ein Ausbreiten von Anti-Rissen (Fletcher u. Pollard, 1981, Dundurs u. Markenscoff, 1989) in der Schneedecke angenommen. Für die Lösung wird das Konzept imaginärer Risse verwendet, dabei kommt ein empirischer Längenparameter zum Einsatz.

## Kapitel 3

### Kleberverbindungen: Einführung und Übersicht über den Stand der Forschung

*Das Ziel dieses Kapitels ist es, einen Überblick über den Stand der Forschung bezüglich des mechanischen Verhaltens von Kleberverbindungen zu geben. Nach einer allgemeinen Einführung von Kleberverbindungen und deren Bedeutung wird das in Experimenten beobachtete Versagensverhalten beschrieben. Die bestehenden Methoden zur Ermittlung der Spannungen werden diskutiert und drei in dieser Arbeit verwendete Spannungslösungen werden im Detail dargestellt. Das Kapitel schließt mit einer umfangreichen Übersicht über aktuell verwendete Versagensmodelle, deren Anwendung und Defizite.*

#### 3.1 Einführung

Zum Verbinden von Bauteilen und Strukturen stehen Ingenieuren eine Vielzahl an Methoden zur Verfügung. Neben Bolzen- und Schweißverbindungen finden Kleberverbindungen einen vielfältigen Einsatz. Insbesondere flächige Verbindungen von dünnwandigen Bauteilen, wie sie im Leichtbau typisch verwendet werden, lassen sich damit sehr vorteilhaft ausführen. Auch sind Verbindungen ungleicher Werkstoffe möglich. Gegenüber Schweißverbindungen haben Kleberverbindungen den Vorteil, dass kein lokaler Wärmeeintrag in die Bauteile erfolgt und beliebige Werkstoffe gefügt werden können. Es müssen keine Löcher mit entsprechender Kerbwirkung in die zu fügenden Teile eingebracht werden. Kleberverbindungen zeichnen sich durch gute Schwingfestigkeitseigenschaften, hohe Strukturdämpfung und aerodynamisch günstige, ebene Oberflächen aus. Außerdem erfolgt eine Abdichtung der vorgenommenen Verbindung. Allerdings gibt es auch einige Nachteile zu nennen. So ist eine Untersuchung von Kleberverbindungen mit zerstörungsfreien Prüfmethoden immer noch Gegenstand der Forschung. In der Fertigung muss meist eine Vorbehandlung der zu fügenden Teile erfolgen und müssen allgemein sehr genaue Prozessabläufe eingehalten werden. Ebenfalls sind Temperaturgrenzen und der Einfluss von Feuchtigkeit auf Kleberverbindungen zu beachten.

Allgemein lässt sich zusammenfassen, dass Kleberverbindungen gerade im Leichtbau eine sehr interessante und vorteilhafte Fügechnik darstellen. In den letzten Jahren wird diese zunehmend in vielen Bereichen des Ingenieurwesens eingesetzt. Zur vollen Ausnutzung der Vorteile ist jedoch ein genaues Verständnis des mechanischen

Tragverhaltens sowie der Versagensprozesse notwendig. Die exakte Vorhersage der Versagenslasten von Klebverbindungen ist aktueller Gegenstand der Forschung.

Je nach struktureller Situation und Belastung der Verbindung gibt es verschiedene Verbindungskonfigurationen, die gebräuchlich sind. In speziellen Struktursituationen gibt es viele Möglichkeiten belastungsgerechte Klebverbindungen auszuführen, vgl. Adams et al. (1997), Schürmann (2007), Habenicht (2006). Typische Klebverbindungskonfigurationen sind in Abbildung 3.1 dargestellt. Die einfachsten Verbindungen sind Stoßfügungen und einschnittige Überlappungsfügungen. Da für Klebstoffe im Allgemeinen Schubbelastungen weniger versagenskritisch sind als Normalspannungen, können durch geschäftete oder gestufte Ausführungen höhere Lasten übertragen werden. Solche Ausführungen sind aber je nach Material und Abmessungen der Fügeiteile mit hohem Aufwand verbunden.

Einschnittige Überlappungsfügungen werden aufgrund ihres einfachen Aufbaus und ihres relativ günstigen Tragverhaltens in der Praxis sehr häufig eingesetzt. Auch werden sie oft als Standardkonfiguration in wissenschaftlichen Untersuchungen von Klebverbindungen eingesetzt, da sie leicht zu fertigen sind. Das mechanische Verhalten sowie die Versagensabläufe dieser Verbindungskonfiguration sind jedoch sehr komplex. An den Bi-Materialpunkten von Kleber und Fügeiteil treten im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie Spannungssingularitäten auf (vgl. Abschnitt 2.3). Durch die Exzentrizität der angreifenden Kräfte wirken in der Klebschicht neben Schubspannungen auch Normalspannungen. Unter Belastung ergeben sich große Biegedeformationen der Fügeiteile, die zu einem nichtlinearen Tragverhalten führen. Die Steifigkeit der Verbindung nimmt mit der Belastung zu, da sich die Hebelarme der Kräfte reduzieren. Die vorliegende Arbeit konzentriert sich auf diese praxisrelevante und mechanisch komplexe Konfiguration der einschnittigen Überlappungsfügung.

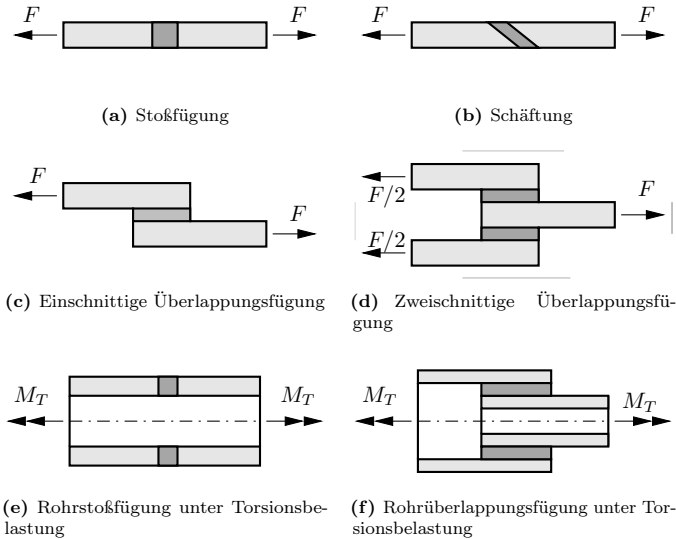
## 3.2 Versagensverhalten von Klebverbindungen

Das Verständnis des Versagensverhaltens ist unabdingbare Voraussetzung für den verbreiteten Einsatz von Klebverbindungen und ist daher Gegenstand der Wissenschaft.<sup>18</sup> Grundsätzlich kann Versagen in den verklebten Fügeiteilen (siehe Abbildung 3.2a,b,c) oder in der Klebschicht selbst auftreten (siehe Abbildung 3.2d,e). Das Versagen der Fügeiteile tritt dann auf, wenn hochfeste Klebstoffe eingesetzt werden um niedrigfeste Fügeiteile zu verbinden. Insbesondere bei dünnen Blechen ist das Biegeversagen der Fügeiteile durch Ausbilden von Fließstreifen ein typisches Bild (Grant et al., 2009a,b). Dieses Biegeversagen ergibt sich aus der Belastung der Fügeiteile durch ein Biegemoment, das am Ende der Klebschicht maximal ist. Selten, aber bei niedrigfesten Fügeiteilen auch möglich, ist ein Versagen der Fügeiteile

---

<sup>18</sup>„Design cannot come first, but must follow analysis and understanding“, (Adams et al., 1997)

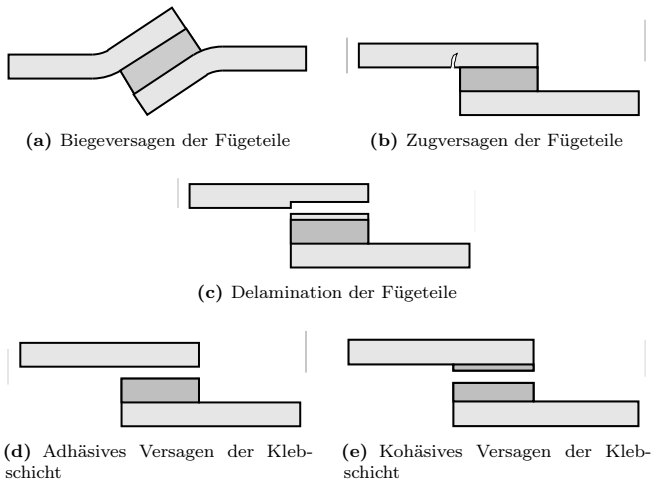




**Abbildung 3.1:** Gebräuchliche Klebverbindungskonfigurationen zur Übertragung von Längskräften und Torsionsbelastungen.

durch die wirkende Zugbelastung. Die in der Klebschicht auftretenden Schälspannungen<sup>19</sup> wirken auch gleichermaßen auf die äußerste Schicht der Fügeteile. Bei geringer Festigkeit in Dickenrichtung kann es dadurch ebenfalls zum Versagen der Fügeteile kommen. Dies ist ein typischer Versagensfall bei Klebverbindungen von Laminaten, da diese nur eine geringe interlaminare Festigkeit besitzen, die geringer sein kann als die Schälfestigkeit von hochfesten Klebstoffen. Die Klebverbindung versagt dann durch Delamination der Fügeteile (Banea u. da Silva, 2009, Neto et al., 2012). Beim Versagen der Klebschicht unterscheidet man grundsätzlich adhäsives und kohäsives Versagen. Adhäsives Versagen bezeichnet hierbei die Trennung der Klebverbindung zwischen dem Klebstoff und den Fügeteilen und kohäsives Versagen ein Trennen der Klebverbindung innerhalb der Klebschicht (Adams et al., 1997). Wie auch bei der Verbindung von Faser und Matrix in Faserkunststoffverbunden ist bei Klebverbindungen kohäsives Versagen das Ziel bei der Auswahl der Klebstoffe, um die für den Werkstoff maximal mögliche Versagenslast zu erreichen. Dazu ist eine entsprechende Vorbereitung der Oberflächen der zu verklebenden Fügeteile von großer Bedeutung (Wegman u. Van Twisk, 2012). Wird ein Versagen

<sup>19</sup>Als Schälbelastung wird die Belastung normal zur Klebschicht bezeichnet.



**Abbildung 3.2:** Mögliches Versagensverhalten von einschnittigen Klebverbindungen.

der Fügeteile sowie ein adhäsives Versagen zwischen Fügeteil und Klebschicht durch entsprechende Materialwahl ausgeschlossen, wird die Klebverbindung bei größtmöglicher Versagenslast kohäsiv versagen.

Die Analyse des Versagensverhaltens von Klebverbindungen ist Gegenstand vieler wissenschaftlicher Arbeiten. Im Mittelpunkt steht dabei die Untersuchung des Einflusses der grundlegenden Parameter beim Gestalten typischer Klebverbindungen auf die Versagenslast. Die wichtigsten Parameter sind die Breite und Länge des Überlappungsbereichs, die Dicke der Fügeteile sowie der Klebschicht und die Ausführung der Enden des Überlappungsbereichs. Die Versagenslast einer Klebverbindung ist im Wesentlichen direkt proportional zu deren Breite, die jedoch meist konstruktiv vorgegeben ist. Die Überlappungslänge steht jedoch meist als konstruktiv wählbarer Parameter zur Verfügung und hat starken Einfluss auf die Versagenslast einer Klebverbindung. Diese steigt mit zunehmender Überlappungslänge an (da Silva et al., 2008). Doch bei sehr großen Überlappungslängen ändert sich die Spannungsverteilung am Rande der Klebschicht kaum noch und die Versagenslast bleibt nahezu konstant (da Silva et al., 2004). Die Dicke der Fügeteile hat ebenfalls einen starken Effekt auf die Belastbarkeit der Klebverbindung. Mit zunehmender Dicke steigt die Biegesteifigkeit der Fügeteile stark an und die Schälbelastung der Klebschicht wird reduziert. Dadurch ergeben sich mit größerer Fügeteildicke höhere ertragbare Lasten (Papini et al., 1994, da Silva et al., 2008).

Aus experimentellen Untersuchungen ist bekannt, dass die Dicke der Klebschicht

ebenfalls einen entscheidenden Einfluss auf die Belastbarkeit der Klebverbindung hat. Mit zunehmender Dicke der Klebschicht nimmt die Belastbarkeit der Klebverbindung ab. Klebverbindungen mit dünneren Klebschichten weisen höhere Versagenslasten auf (Adams u. Peppiatt, 1974, Adams et al., 1997, Azari et al., 2011). Aus Experimenten ist bekannt, dass bei sehr dünnen Klebschichten die Rauigkeiten der Fügeteile die Belastbarkeit reduzieren und für strukturelle Klebungen – abhängig vom verwendeten Klebstoff – eine Klebschichtdicke von rund 0,2 mm optimal ist (Gleich et al., 2001). Warum die Versagenslasten mit zunehmender Klebschichtdicke abnehmen ist Gegenstand aktueller Forschung. Der Effekt widerspricht der Erkenntnis von Spannungsanalysen (vgl. Adams et al. (1997)). Diese zeigen, dass mit zunehmender Klebschichtdicke der Kraftfluss weniger stark konzentriert ist und das Spannungsniveau am Ende des Überlappungsbereichs sinkt. In der Literatur werden mehrere Erklärungen für das Sinken der Versagenslast mit zunehmender Klebschichtdicke angeführt. Adams u. Peppiatt (1974) geben als Erklärung die Zunahme von statistisch verteilten Defekten und Mikrorissen in dickeren Klebschichten an. Crocombe (1989) erklärt den Effekt mit einem Versagensmodell, das vollständiges Plastifizieren der Klebschicht annimmt und Gleich et al. (2001) und da Silva et al. (2006) erklären den Effekt durch eine Abnahme der Spannungen in der Grenzschicht. Der Einfluss des Biegemomentes wird von Grant et al. (2009b) diskutiert um den Einfluss der Klebschichtdicke zu erklären. In der Analyse von Taib et al. (2006) wird ein möglicher Übergang von sprödem zu duktilem Versagen und ein verhinderter Wechsel möglicher Risse von einer zur anderen Grenzschicht als Erklärung für den Klebschichtdickeneffekt angegeben. Auch werden erhöhte Querkontraktionsbehinderungen und veränderte Aushärtebedingungen als mögliche Gründe für den Klebschichtdickeneffekt in der Literatur aufgeführt (Habenicht, 2006).

Die Ausführung der Enden der Klebschicht hat einen großen Einfluss auf die Belastbarkeit der Verbindung. Konstruktiv vorgesehene Abschrägungen der Klebschicht am Ende des Überlappungsbereichs steigern, wie auch die beim Kleben entstehenden Klebkehlen<sup>20</sup>, die Belastbarkeit von Klebverbindungen (Adams u. Peppiatt, 1974, Adams et al., 1997). Lang u. Mallick (1998) und Crocombe u. Adams (1981) haben umfangreich Finite-Elemente-Studien zum Einfluss verschiedener Ausführungen von Klebfugenenden durchgeführt und kommen zum Schluss, dass mit gleichmäßigem Übergang von Fügeteil und Klebschicht die maximalen Spannungen stark reduziert werden können<sup>21</sup>. Diese Ergebnisse numerischer Analysen zeigen sich auch in experimentellen Studien, wie etwa in den Untersuchungen von Adams et al. (1986), Adams u. Harris (1987). In der Arbeit von Rispler et al. (2000) werden Ergebnisse einer Optimierung der Klebfugenkehlen ausgeführt, die eine mögliche Reduktion der maximalen Spannungen ergibt. In den meisten Untersuchungen von Klebverbindungen werden rechtwinklige Klebfugenenden betrachtet, da diese die

---

<sup>20</sup> Engl.: adhesive fillets

<sup>21</sup> Die Autoren verwenden für alle Geometrien ein ähnliches Netz, diskutieren jedoch nicht die Netzhängigkeit der Ergebnisse. Der Effekt der vorhandenen Spannungssingularitäten wird nicht beachtet.

kritischste Konfiguration darstellen und eine bestimmte Form der Klebfugenenden nur schwierig herzustellen ist. In Experimenten wird dazu meist nach dem Fügen der unausgehärtete Klebstoff mit einem rechtwinkligen Messer entfernt und so eine einheitliche, rechtwinklige Klebfuge erzeugt. Eine Betrachtung solcher Klebfugenenden ergibt eine konservative Abschätzung der Versagenslasten.

Ebenfalls starken Einfluss auf das Versagensverhalten hat die Ausführung der Fügeteile. In der Literatur finden sich einige Untersuchungen, die sich mit dem Effekt einer Abrundung der Fügeteile (Adams u. Harris, 1987), einer Formoptimierung (Belingardi et al., 2001, Kaye u. Heller, 2002) oder der Spannungsreduktion durch Ansrägen der Enden der Fügeteile (Vallée u. Keller, 2006, da Silva u. Adams, 2007) beschäftigen. Doch es hat sich gezeigt, dass in den meisten Anwendungen der Herstellungsaufwand solch modifizierter Fügeteile zu groß ist. Nur bei speziellen Anwendungssituationen, wie etwa Reparaturpflastern auf beschädigten Faserkunststoffverbunden, können solche aufwändigen Fügungen sinnvoll zum Einsatz kommen (Soutis u. Hu, 1997, Brighenti, 2007).

Eine weitere Möglichkeit, die versagenswirksamen Spannungskonzentrationen am Rand der Klebschicht zu reduzieren, ist der Einsatz von in Längsrichtung gestuften oder gradierten Klebstoffen. Die Klebverbindungen werden dabei so aufgebaut, dass in der Mitte des Überlappungsbereichs der Klebstoff eine höhere Steifigkeit besitzt als am Rand und somit der Kraftfluss gleichmäßiger erfolgt. Dazu können mehrere Klebstoffe kombiniert (das Neves et al., 2009a,b, Fitton u. Broughton, 2005) oder gradierte Klebstoffe (Stapleton et al., 2012) verwendet werden.

## **3.3 Ermittlung der Spannungen in Klebverbindungen**

In den letzten 75 Jahren wurden eine Vielzahl an Modellen zur Ermittlung der Spannungen in Klebverbindungen vorgestellt. Neben zahlreichen geschlossen-analytischen Modellen wurden verschiedene numerische Zugänge für die Untersuchung von Klebverbindungen in der Literatur vorgestellt. Im Folgenden soll eine Literaturübersicht hinsichtlich der Untersuchung von einschnittigen Überlappungsfügungen gegeben werden. Eine elastizitätstheoretische exakte Lösung des Randwertproblems einer solchen Fügung kann nicht angegeben werden. Es wurden jedoch eine Vielzahl an Näherungslösungen vorgeschlagen, die für die Fügeteile und die Klebschicht eine vereinfachte Kinematik zugrunde legen.

Das älteste Modell, ein einfaches Längsgurt-Scheibe-Modell<sup>22</sup>, ist das Modell von Volkersen (1938)<sup>23</sup>. Dort werden die Fügeteile als biegestarke Stäbe betrachtet und die Klebschicht durch eine Reihe elastischer Schubfedern abgebildet. Es wird lediglich eine Längsverteilung der in Dickenrichtung konstanten Schubspannungen

<sup>22</sup>Im Englischen eindeutiger als „shear-lag“ bezeichnet.

<sup>23</sup>Eigentlich beschäftigt sich diese Arbeit mit der Verteilung von Nietkräften in einer Nietreihe. Durch die Annahme kontinuierlicher („verschmierter“) Eigenschaften der Nieten in Längsrichtung ergibt sich jedoch eine für Klebschichten typische Modellbildung.

vorhergesagt. Im Modell von Goland u. Reissner (1944)<sup>24</sup> werden die Füge­teile als Balken betrachtet. Damit werden neben Schubspannungen auch Schälspannungen betrachtet. Dabei wird keine Variation der Spannungen über der Klebschichtdicke betrachtet. Das Biegemoment der angreifenden Kräfte wird mit einem nichtlinearen Momentenfaktor skaliert, um den Einfluss der großen Biegedehformationen der Füge­teile abzubilden. Eine Erweiterung dieses Modells mit einer anderen Formulierung des Momentenfaktors wurde von Hart-Smith (1973, 1981) vorgeschlagen. Schubdeformationen der Füge­teile wurden zum Beispiel in den Modellen von Renton u. Vinson (1975), Tsai et al. (1998) und Srinivas (1975) berücksichtigt. Insbesondere bei der Analyse von Klebverbindungen von Laminaten kann die Schubnachgiebigkeit eine wichtige Rolle spielen. Eine Erweiterung um die Berücksichtigung von Biege-Dehn-Kopplungen unsymmetrischer Laminare wurde von Delale et al. (1981) und Yang u. Pang (1996) vorgeschlagen. Das Modell von Ojalvo u. Eidinoff (1978) erweitert das Modell von Goland u. Reissner (1944) um eine konsequente Berücksichtigung des Einflusses der Klebschichtdicke. Eine genauere Abbildung des spannungsfreien, freien Randes der Klebschicht erfolgt in den Modellen von Renton u. Vinson (1975) und Allman (1977). Eine Analyse der Spannungsverteilung in der Klebschicht wurde von Bansemir (1973) unter Nutzung des Übertragungsma­trizenverfahrens angegeben. In den Modellen von Hart-Smith (1973), Bigwood u. Crocombe (1990) und Adams u. Mallick (1992) wurde ein elasto-plastisches Materialverhalten der Klebschicht vorgesehen.

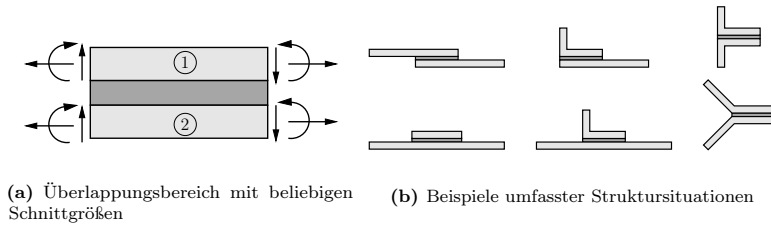
Doch mit zunehmender Modellkomplexität wird eine explizite Lösung der resul­tierenden Gleichungssysteme erschwert und teilweise verhindert. Dann müssen numerische Verfahren zur Lösung der Differentialgleichungssysteme genutzt werden. Insbesondere gilt dies für allgemeinere elastizitätstheoretische Näherungslösungen, wie die Lösung von Pirvics (1974) mit dem Prinzip des Stationärwerts des Ge­samtpotentials, asymptotische Formulierungen (Klarbring u. Movchan, 1998), die Lösung mit Hilfe der Variationsrechnung (Frostig et al., 1999) oder die Lösung von Lazzarin et al. (2002), die Spannungsfunktionen zur Lösung verwenden. In diesen Lösungen kann die auftretende Spannungssingularität teilweise abgebildet werden. Es werden jedoch zwangsläufig numerische Verfahren, etwa die Finite Differenzen Methode, zur Lösung benötigt.

Eine gute Übersicht über diese und weitere Modelle zur Beschreibung des Span­nungszustandes in einschneidenden Überlappungs­fügungen ist in den Publikationen von das Neves et al. (2009a,b) und Banea u. da Silva (2009) sowie in den Fachbü­chern von da Silva u. Öchsner (2008) und Adams et al. (1997) gegeben.

Eine weitere interessante Klasse von geschlossen-analytischen Modellen sind die sogenannten „general sandwich-type“-Modelle, die nur den Überlappungsbereich der Fügung betrachten, siehe Abbildung 3.3. Dadurch, dass am Rand der Füge­teile

---

<sup>24</sup>In der Originalarbeit gibt es kleine Fehler und Ungenauigkeiten in der Herleitung und der Lösung. Die Korrektur dieser Fehler war Gegenstand einiger Arbeiten, wobei insbesondere die Arbeiten von Tsai u. Morton (1994a) und Tsai u. Morton (1994b) zu nennen sind, die die Korrekturen zusammenfassen sowie einen Vergleich mit nichtlinearen Finite-Elemente-Analysen zeigen.



**Abbildung 3.3:** „General sandwich-type“-Modelle können für die Analyse unterschiedlicher Struktursituationen eingesetzt werden (Bigwood u. Crocombe, 1989, Weißgraeber et al., 2014c).

beliebige Schnittgrößen vorgesehen werden, können beliebige Varianten von Klebverbindungen betrachtet werden. Neben den zuvor betrachteten, zugbelasteten einschnittigen Überlappungsfügungen können auch T-Fügungen, L-Fügungen oder etwa Verstärkungspflaster betrachtet werden. Das erste „general sandwich-type“-Modell wurde von Bigwood u. Crocombe (1989) vorgeschlagen und stellt eine direkte Erweiterung der Goland-Reissner-Lösung auf beliebige Klebverbindungen dar. In Zusammenarbeit mit N. Stein wurde vom Autor ein erweitertes „general sandwich-type“-Modell entwickelt (Weißgraeber et al., 2014c). In diesem Modell wurde die Schubdeformationstheorie erster Ordnung verwendet. Dabei können die Fügeteile als Lamine mit beliebiger Biege-Dehn-Kopplung dargestellt werden.

Mit der Weiterentwicklung der numerischen Methode, wie etwa der Finite-Elemente-Methode oder der Rand-Elemente-Methode, sind diese auch für die Analyse von Klebverbindungen zunehmend bedeutsam geworden. Seit den ersten Finite-Elemente-Analysen von Wooley u. Carver (1971), Adams u. Peppiatt (1974) für Klebverbindungen<sup>25</sup> wurde insbesondere diese numerische Methode von unzähligen Autoren für die Analyse genutzt (Adams et al., 1997, da Silva u. Campilho, 2012). Sie erlaubt eine Betrachtung beliebig gestalteter Klebverbindungen unter Berücksichtigung von nichtlinearen Effekten wie großen Deformationen oder nichtlineares Materialverhalten. Dabei muss jedoch eine sehr sorgfältige Modellbildung durchgeführt werden. Besondere Beachtung muss der Netzabhängigkeit der Ergebnisse geschenkt werden. Etwaige Spannungssingularitäten können dabei nicht vollständig abgebildet werden und äußern sich mit stark steigenden, nicht konvergierenden Spannungen bei Netzverfeinerung. Wird eine bestimmte Netzfeinheit als Kompromiss zwischen Rechenaufwand und Rechengenauigkeit festgelegt, so muss darauf geachtet werden, dass diese in weiteren Rechnungen äquivalent beibehalten wird. Der größte Nachteil numerischer Lösungsverfahren ist, dass immer nur eine Lösung für eine bestimmte Klebverbindungskonfiguration bestimmt

<sup>25</sup>In diese ersten numerischen Analysen wurden aufgrund der geringen zur Verfügung stehenden Rechenkapazitäten sehr grobe Netze verwendet. Die Modelle waren kaum geeignet Erkenntnisse zu gewinnen, die über die einfachen geschlossen-analytischen Modelle hinausgingen.

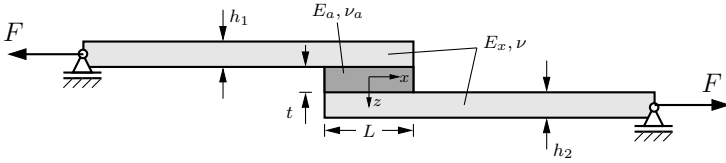


Abbildung 3.4: Einschnittige Überlappungsfügung unter axialer Zugbelastung.

werden kann und keine in Formeln ausgedrückten Zusammenhänge erhalten werden können. Insbesondere dadurch entsteht bei Parameterstudien oder der Lösung von Optimierungsproblemen schnell ein erheblicher Rechenaufwand.

### 3.3.1 Detaillierte Darstellung von im Folgenden verwendeten klassischen Spannungslösungen

In der vorliegenden Arbeit werden, neben einem Finite-Elemente-Modell, drei der geschlossen-analytischen Lösungen für eine Untersuchung der Rissinitiation in Klebverbindungen verwendet. Es werden die klassischen Lösungen von Volkersen, Goland und Reissner sowie von Ojalvo und Eidinoff verwendet. Im Folgenden sollen diese Lösungen detailliert dargestellt und in einheitlicher Notation angegeben werden.

Es wird die in Abbildung 3.4 dargestellte einschnittige Überlappungsfügung unter axialer Belastung  $F$  mit Überlappungslänge  $L$ , Fügeteildicken  $h_1, h_2$ , Klebschichtdicke  $t$  und Tiefe (Breite)  $b$  betrachtet. Die Fügeteile haben den Elastizitätsmodul  $E_x$  und die Poissonzahl  $\nu$ . Der Elastizitäts- und Schubmodul der Klebschicht und deren Poissonzahl seien  $E_a, G_a$  und  $\nu_a$ . Das Koordinatensystem mit Axialkoordinate  $x$  und Dickenkoordinate  $z$  liegt in der Mitte der Klebschicht.

**Volkersen-Modell** Im Volkersen-Modell (Volkersen, 1938)<sup>26</sup> werden die Fügeteile als biegestarke Stäbe modelliert. Der Effekt von Biegedeformationen wird somit ausgeschlossen. Für die Klebschicht wird ein linear-elastischer Zusammenhang der Schubspannung und der Schubdeformation vorausgesetzt:

$$\tau = G_a \gamma. \quad (3.1)$$

Die Schubdeformation ergibt sich aus der Differenz der Verschiebungen  $u_1, u_2$  der Fügeteile und der Klebschichtdicke:

$$\gamma = \frac{u_2 - u_1}{t}. \quad (3.2)$$

<sup>26</sup>Diese Arbeit wurde als Bericht der *Ernst-Heinkel-Flugzeugwerke* in Rostock publiziert.

### Kapitel 3 Klebverbindungen: Stand der Forschung

Die Differentialgleichungen für die Dehnung der Stäbe sind (Gross et al., 2012):

$$(E_x b h_1 u_1')' = -n_1 \quad \text{und} \quad (E_x b h_2 u_2')' = -n_2 \quad (3.3)$$

Hier und im Folgenden stellt  $(\cdot)'$  die Ableitung nach  $x$  dar.

Die Längskraftverteilungen entsprechen der unbekannten Schubspannung in der Klebfuge:

$$n_1 = b\tau \quad \text{und} \quad n_2 = -b\tau. \quad (3.4)$$

Mit konstanten Dehnsteifigkeiten der Fügeteile ( $Ebh = \text{const}$ ) ergibt sich damit aus Gleichung (3.3) eingesetzt in die zweite Ableitung von Gleichung (3.2) unter Berücksichtigung des Materialgesetzes (3.1) folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Schubspannung:

$$\frac{d^2\tau}{dx^2} - \frac{G_a}{t} \frac{(1 + h_1/h_2)}{E_x h_1} \tau = 0. \quad (3.5)$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist:

$$\tau = A_1 \cosh \omega x + A_2 \sinh \omega x \quad (3.6)$$

$$\text{mit } \omega^2 = \frac{(1 + h_1/h_2) G_a}{E_x h_1 t}. \quad (3.7)$$

Dabei müssen die freien Konstanten  $A_1$  und  $A_2$  über die Bedingung der Gesamtkraft und der Deformation der Fügeteile am Ende der Überlappungslänge ermittelt werden:

$$\int_{-L/2}^{L/2} b\tau \, dx = F, \quad (3.8)$$

$$\left. \frac{d\tau}{dx} \right|_{x=\pm L/2} = G_a \frac{F}{t b h_{1,2} E_x}. \quad (3.9)$$

Für den Fall gleicher Fügeteildicken  $h_1 = h_2 = h$  ergibt sich folgender Ausdruck für die Schubspannungen in der Klebschicht:

$$\tau^{(V)} = \frac{F}{b} \frac{\omega \cosh(\omega x)}{2 \sinh(\omega \frac{L}{2})} \quad (3.10)$$

$$\text{mit } \omega^2 = \frac{2G_a}{E_x h t}. \quad (3.11)$$

Der Index  $^{(V)}$  wird nun im Weiteren verwendet, um die Spannungslösung des Volkersen-Modells zu kennzeichnen.



**Goland-Reissner-Modell** Im Modell von Goland u. Reissner (1944)<sup>27</sup> wird die Biegedeformation der Fügeteile berücksichtigt. In diesem Modell werden symmetrische einschnittige Klebverbindungen ( $h_1 = h_2 = h$ ) betrachtet. Neben Schubspannungen in der Klebschicht werden Schälspannungen vorhergesagt. Die Abbildung 3.3 zeigt den Bereich der Überlappungslänge. Das angreifende Schnittmoment  $M_0$  und die Querkraft  $Q_0$  sind durch die großen Biegedeformationen der Fügeteile nichtlinear mit der angreifenden Kraft  $F$  verknüpft. Dazu wird ein sogenannter Momentenfaktor  $k$  eingeführt.<sup>28</sup>

Die Ermittlung des korrekten nichtlinearen Momentenfaktors war seit der Arbeit von Goland u. Reissner (1944) Gegenstand vieler Untersuchungen (wie etwa Hart-Smith, 1973, Zhao et al., 1990, Tsai u. Morton, 1994b,a, Oplinger, 1994), wobei die Gültigkeit der Lösung von der Überlappungslänge und der Fügeteildicke abhängt. In den Untersuchungen von Zhao et al. (1990) und Tsai u. Morton (1994b) wird gezeigt, dass der Momentenfaktor des Goland-Reissner-Modells (3.14) für die meisten Konfigurationen die besten Ergebnisse ergibt. Diese Definition wird in dieser Arbeit verwendet:

$$M_0 = kF \frac{h}{2}, \quad (3.12)$$

$$Q_0 = k'F, \quad (3.13)$$

wobei

$$k = \frac{1}{1 + 2\sqrt{2} \tanh \left( \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{2}} \frac{L}{2h} \sqrt{\frac{F}{Ehb}} \right)}, \quad (3.14)$$

$$k' = \frac{1}{L} ((1 - k)h + t). \quad (3.15)$$

Darin ist die Definition der Querkraft (3.13) im Sinne der von Chen u. Cheng (1983) vorgeschlagenen Verbesserung des Goland-Reissner-Modells gewählt.

Im Grunde genommen stellt die Analyse von Goland und Reissner die Kombination des Volkersen-Modells<sup>29</sup> mit der klassischen Lösung des elastisch gebetteten Balkens mit Randmomenten und -kräften (vgl. Hetenyi, 1958) dar.

Für den Balken wird die Euler-Bernoullische Balkentheorie verwendet (Gross et al., 2012). Der Zusammenhang der Absenkungen  $w_{1,2}$  der Fügeteile sowie der Axialverschiebung  $u_{1,2}$  der der Klebschicht zugewandten Seite der Fügeteile mit den

<sup>27</sup>Diese Arbeit von Martin Goland und Eric Reissner entstand im Auftrag des US-amerikanischen Flugzeugherstellers *Curtiss-Wright Corporation*.

<sup>28</sup>Diese Vorgehensweise mit Ermittlung der Schnittgrößen am verformten System bei linearisierter Betrachtung der Deformationen wird als Theorie zweiter Ordnung bezeichnet.

<sup>29</sup>Wahrscheinlich hatten Goland und Reissner 1944 keine Kenntnis des sechs Jahre zuvor erschienenen deutschen Artikels in „Luftfahrtforschung“ von Olaf Volkersen.

Schnittmomenten  $M_{1,2}$  und den Schnittkräften  $N_{1,2}$  wird somit folgendermaßen angenommen:

$$w'' = -\frac{12(1-\nu^2)}{E_x b h^3} M_{1,2}, \quad (3.16)$$

$$u'_{1,2} = \frac{1}{E_x} \left( \frac{N_{1,2}}{bh} \mp \frac{6M_{1,2}}{bh^2} \right). \quad (3.17)$$

Aus dem Gleichgewicht an den Fügeitelementen erhält man folgende Zusammenhänge:

$$Q'_{1,2} = \pm b\sigma, \quad (3.18)$$

$$N'_{1,2} = \pm b\tau, \quad (3.19)$$

$$M'_{1,2} = Q_{1,2} + \frac{h}{2} b\tau. \quad (3.20)$$

Die Verzerrungen werden über die Differenz der Verschiebungen und Absenkungen der Fügeiteile berechnet. Mit linear elastischem Materialverhalten ergibt sich:

$$\tau = G_a \gamma_{xz} = G_a \frac{u_1 - u_2}{t}, \quad (3.21)$$

$$\sigma = E_a \varepsilon_{xz} = E_a \frac{w_1 - w_2}{t}. \quad (3.22)$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Differentialgleichungen für die Schubspannung  $\tau$  und die Schälspannung  $\sigma$ :

$$\frac{d^3\tau}{dx^3} - \frac{8G_a}{E_x h t} \frac{d\tau}{dx} = 0, \quad (3.23)$$

$$\frac{d^4\sigma}{dx^4} + \frac{24(1-\nu^2)E_a}{E_x h^3 t} \sigma = 0. \quad (3.24)$$

Dabei gelten für die Schubspannung folgende Randbedingungen des Gleichgewichts und der Deformationen am Rand der Überlappungslänge:

$$\int_{-L/2}^{L/2} b\tau dx = F, \quad (3.25)$$

$$\left. \frac{d\tau}{dx} \right|_{x=\pm \frac{L}{2}} = \pm \frac{G_a}{E_x h t} \left( F + \frac{6M}{h} \right). \quad (3.26)$$

Für die Schälspannung in der Klebschicht gelten dabei die folgenden Randbedingungen für die Schnittgrößen:

$$\left. \frac{d^2\sigma}{dx^2} \right|_{x=\pm \frac{L}{2}} = \frac{12E_a(1-\nu^2)}{E_x h^3 t} \frac{M_0}{b}, \quad (3.27)$$

### 3.3 Ermittlung der Spannungen in Klebverbindungen

$$\left. \frac{d^3 \sigma}{dx^3} \right|_{x=\pm \frac{L}{2}} = \mp \frac{12E_a(1-\nu^2)}{E_x h^3 t} \frac{Q_0}{b}. \quad (3.28)$$

Die Lösungen der Differentialgleichungen für die Schubspannung (3.23) und Schälspannung (3.24) in der Klebschicht ergeben sich unter Berücksichtigung dieser Randbedingungen zu

$$\tau^{(\text{GR})} = \frac{F}{bL} \left( \frac{1+3k}{4} \lambda_\tau \frac{L}{2} \frac{\cosh(\lambda_\tau x)}{\sinh(\lambda_\tau \frac{L}{2})} + 1 - \frac{1+3k}{4} \right) \quad (3.29)$$

mit:

$$\lambda_\tau = \sqrt{\frac{8G_a}{E_x h t}}, \quad (3.30)$$

sowie

$$\begin{aligned} \sigma^{(\text{GR})} = \frac{Fh\lambda_\sigma}{\Delta b} & \left( \left( \frac{1}{2} k \lambda_\sigma R_1 + \frac{2}{L} k' \sinh\left(\lambda_\sigma \frac{L}{2}\right) \sin\left(\lambda_\sigma \frac{L}{2}\right) \right) \sinh(\lambda_\sigma x) \sin(\lambda_\sigma x) \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{2} k \lambda_\sigma R_2 + \frac{2}{L} k' \cosh\left(\lambda_\sigma \frac{L}{2}\right) \cos\left(\lambda_\sigma \frac{L}{2}\right) \right) \cosh(\lambda_\sigma x) \cos(\lambda_\sigma x) \right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

mit

$$\lambda_\sigma = \sqrt[4]{\frac{6E_a(1-\nu^2)}{E_x h^3 t}}, \quad (3.32)$$

$$\Delta = \frac{1}{2} (\sin(\lambda_\sigma L) + \sinh(\lambda_\sigma L)), \quad (3.33)$$

$$R_1 = \cosh\left(\lambda_\sigma \frac{L}{2}\right) \sin\left(\lambda_\sigma \frac{L}{2}\right) + \sinh\left(\lambda_\sigma \frac{L}{2}\right) \cos\left(\lambda_\sigma \frac{L}{2}\right), \quad (3.34)$$

$$R_2 = \sinh\left(\lambda_\sigma \frac{L}{2}\right) \cos\left(\lambda_\sigma \frac{L}{2}\right) - \cosh\left(\lambda_\sigma \frac{L}{2}\right) \sin\left(\lambda_\sigma \frac{L}{2}\right). \quad (3.35)$$

Der Index <sup>(GR)</sup> wird verwendet, um die Lösung des Goland-Reissner-Modells zu kennzeichnen.

**Ojalvo-Eidinoff-Modell** In der Arbeit von Ojalvo u. Eidinoff (1978)<sup>30</sup> wird eine Erweiterung und Verbesserung des Goland-Reissner-Modells vorgeschlagen. Es

---

<sup>30</sup>Diese Arbeit entstand im Auftrag des US-amerikanischen Flugzeugherstellers *Grumman Aerospace Corporation*.

wurde versucht insbesondere den Einfluss der Klebschichtdicke auf die Spannungsverteilung genauer abzubilden. Folgende Zusammenhänge für die Schnittgrößen ergeben sich dann:

$$M_0 = kF \frac{h+t}{2}, \quad (3.36)$$

$$Q_o = \frac{1}{L} (1-k) (h+t) F \quad (3.37)$$

Es wird eine lineare Verteilung der Schubspannung in Dickenrichtung der Klebschicht angenommen. Dabei wird die Schubspannung im oberen Interface mit  $\tau_1$ , die Schubspannung im unteren Interface mit  $\tau_2$  und die Schubspannung in der Mittelebene mit  $\tau_0$  bezeichnet. Dementsprechend gilt:

$$\tau_0 = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}. \quad (3.38)$$

Im Gegensatz zur Definition der Verzerrungen im Goland-Reissner-Modell (3.21) wird im Modell von Ojalvo und Eidinoff die vollständige Definition der Schubdeformation im Sinne des linearisierten Verzerrungstensors (2.9) verwendet:

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (3.39)$$

Für die Schubspannungen am oberen und unteren Rand der Klebschicht ergibt sich damit folgender Zusammenhang:

$$\tau_{1,2} = G_a \left( \frac{u_1 - u_2}{t} + w'_{1,2} \right). \quad (3.40)$$

Das Momentengleichgewicht der Fügeelemente ergibt sich unter Berücksichtigung der Klebschichtdicke zu:

$$M'_{1,2} = Q_{1,2} + \frac{h}{2} b \tau_{1,2}. \quad (3.41)$$

Insgesamt ergeben sich die folgenden gekoppelten Differentialgleichungen für die Schub- und Normalspannungen in der Mittelebene:

$$\frac{d^3 \tau_0}{dx^3} - \frac{8G_a}{E_x t h} \sqrt{\frac{1 + 3 \left(1 + \frac{t}{h}\right)^2}{4}} \frac{d\tau_0}{dx} = 0, \quad (3.42)$$

$$\frac{d^4 \sigma}{dx^4} - \frac{3}{4} \frac{t}{h} \frac{8G_a}{E^* h t} \frac{d^2 \sigma}{dx^2} + \frac{24E_a}{E_x h^3 t} \sigma = 0. \quad (3.43)$$

Dabei ist  $E^* = E/(1-\nu)^2$ .

Analog zum Goland-Reissner-Modell gibt es wieder die Randbedingungen für die Schub- und Normalspannungen, die aus dem Gleichgewicht und den Deformationen

### 3.3 Ermittlung der Spannungen in Klebverbindungen

am Ende der Überlappungslänge folgen:

$$\int_{-L/2}^{L/2} b\tau_0 dx = F, \quad (3.44)$$

$$\left. \frac{d\tau_0}{dx} \right|_{x=\pm L/2} = \pm \frac{G_a}{E_x h t} \left( F + \frac{6 \left(1 + \frac{t}{h}\right) M}{h} \right), \quad (3.45)$$

$$\left. \frac{d^3\sigma}{dx^3} \right|_{x=\pm \frac{L}{2}} - \frac{3}{4} \frac{t}{h} \lambda_\tau^2 \left. \frac{d\sigma}{dx} \right|_{x=\pm \frac{L}{2}} = \mp 2\lambda_\sigma^4 \frac{Q_0}{b}, \quad (3.46)$$

$$\left. \frac{d^2\sigma}{dx^2} \right|_{x=\pm \frac{L}{2}} = 2\lambda_\sigma^4 \frac{M_0}{b}. \quad (3.47)$$

Dabei entsprechen  $\lambda_\tau$  und  $\lambda_\sigma$  den in der Goland-Reissner-Lösung eingeführten Größen. Damit ergibt sich folgende Lösung für die Schubspannung  $\tau_0$  in der Mittelebene und die Schubspannungen  $\tau_{1,2}$  am oberen und unteren Rand der Klebschicht:

$$\tau_0^{(\text{OE})} = \frac{F}{bL} \left( \frac{\chi^2}{\zeta} \lambda_\tau \frac{L}{2} \frac{\cosh(\zeta \lambda_\tau x)}{\sinh(\zeta \lambda_\tau \frac{L}{2})} + 1 - \frac{\chi^2}{\zeta^2} \right), \quad (3.48)$$

$$\tau_{1,2}^{(\text{OE})} = \tau_0^{(\text{OE})} \mp \frac{tG_a}{2E_a} \frac{d\sigma_0^{(\text{OE})}}{dx} \quad (3.49)$$

mit

$$\chi = \sqrt{\frac{1 + 3 \left(1 + \frac{t}{h}\right)^2 k}{4}}, \quad (3.50)$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{1 + 3 \left(1 + \frac{t}{h}\right)^2}{4}}. \quad (3.51)$$

Für die Normalspannung in der Klebschicht resultiert aus der Differentialgleichung (3.43) folgende Lösung:

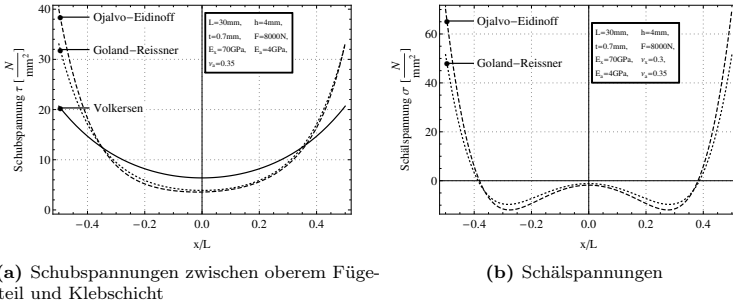
$$\sigma_0^{(\text{OE})} = A_1 \sinh(\alpha_1 x) \sin(\alpha_2 x) + A_2 \cosh(\alpha_1 x) \cos(\alpha_2 x) \quad (3.52)$$

mit

$$\alpha_{1,2} = \sqrt{\pm \frac{3}{16} \frac{t}{h} \lambda_\tau^2 + \lambda_\sigma^2}. \quad (3.53)$$

Die Konstanten  $A_1$  und  $A_2$  müssen aus dem linearen Gleichungssystem der Randbedingungen (3.46, 3.47) ermittelt werden. Es ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$A_1 = \frac{F(h+t)\lambda_\sigma^4 / (bL\lambda_\sigma^2)}{3t\lambda_\tau^2(\alpha_2 \sinh(L\alpha_1) - \alpha_1 \sin(L\alpha_2)) + 8h\lambda_\sigma^2(\alpha_1 \sin(L\alpha_2) + \alpha_2 \sinh(L\alpha_1))}$$



**Abbildung 3.5:** Vergleich der Ergebnisse der Spannungslösung von Volkersen, Goland-Reissner und Ojalvo-Eidinoff.

$$\begin{aligned}
 & \times \left( \cos\left(\frac{1}{2}L\alpha_2\right) \left(L\alpha_1 k \sinh\left(\frac{1}{2}L\alpha_1\right) 8h\lambda_\sigma^2 + 3(k-1)\frac{t}{h}\lambda_\tau^2 \cosh\left(\frac{1}{2}L\alpha_1\right)\right) \quad (3.54) \\
 & + \alpha_2 \sin\left(\frac{1}{2}L\alpha_2\right) \left(Lk \cosh\left(\frac{1}{2}L\alpha_1\right) 8h\lambda_\sigma^2 - 16\alpha_1(k-1) \sinh\left(\frac{1}{2}L\alpha_1\right)\right) \Bigg), \\
 A_2 = & \frac{F(h+t)\lambda_\sigma^4 / (bL\lambda_\sigma^2)}{3t\lambda_\tau^2(\alpha_2 \sinh(L\alpha_1) - \alpha_1 \sin(L\alpha_2)) + 8h\lambda_\sigma^2(\alpha_1 \sin(L\alpha_2) + \alpha_2 \sinh(L\alpha_1))} \\
 & \times \left( \alpha_2 \cos\left(\frac{1}{2}L\alpha_2\right) \left(Lk \sinh\left(\frac{1}{2}L\alpha_1\right) 8h\lambda_\sigma^2 - 16\alpha_1(k-1) \cosh\left(\frac{1}{2}L\alpha_1\right)\right) \quad (3.55) \right. \\
 & \left. - \sin\left(\frac{1}{2}L\alpha_2\right) \left(L\alpha_1 k \cosh\left(\frac{1}{2}L\alpha_1\right) 4\lambda_\sigma^2 + 3(k-1)\frac{t}{h}\lambda_\tau^2 \sinh\left(\frac{1}{2}L\alpha_1\right)\right) \right).
 \end{aligned}$$

Die Darstellung der Gleichungen des Goland-Reissner- und des Ojalvo-Eidinoff-Modells sowie die Definition der Konstanten wurde so gewählt, dass ein direkter Vergleich erleichtert wird. Man erkennt, dass die Differentialgleichungen und Randbedingungen identisch werden, wenn die Klebschichtdicke gegenüber der Füge-teildicke als verschwindend klein betrachtet wird, also der Quotient  $t/h$  gegen null geht. Bei üblichen Klebverbindungen hingegen nimmt der Quotient Werte im Bereich von 0,05 und 0,5 an und ist damit nicht verschwindend klein.

Die Ergebnisse der Spannungsanalyse der drei dargestellten Modelle sind in Abbildung 3.5 dargestellt. Dabei sind in 3.5(a) die Schubspannungen am oberen Rand der Klebschicht ausgewertet. Aufgrund der linearen Verteilung der Schubspannungen im Ojalvo-Eidinoff-Modell ergibt sich eine asymmetrische Schubspannungsverteilung.

### 3.4 Versagensmodelle

Die Frage nach der Belastbarkeit von Klebverbindungen und deren Versagensverhalten ist Gegenstand vieler wissenschaftlicher Untersuchungen. Im Wesentlichen gibt es drei verschiedene Ansätze zur Bewertung von Versagen von Klebverbindungen: Festigkeitsmechanische Ansätze, die meist auf Basis der Spannungen Versagen vorhersagen, bruchmechanische Ansätze, die Verfahren der Bruchmechanik nutzen um Versagensaussagen zu treffen, sowie Ansätze aus dem Bereich der Schädigungsmechanik, die ein Schädigungsgesetz verwenden um Versagen abzubilden. Im Folgenden soll ein Überblick über diese drei Ansätze und deren Darstellung in der Literatur gegeben werden.

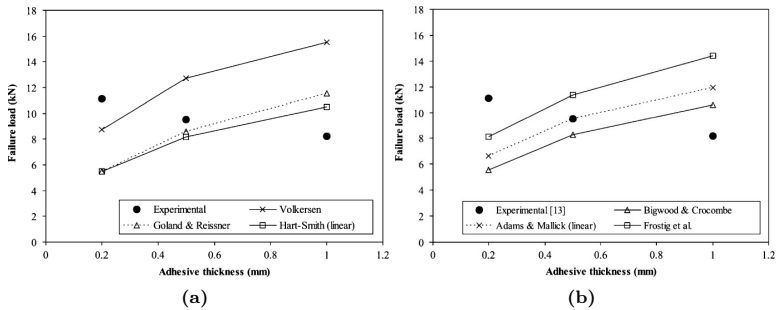
#### 3.4.1 Festigkeitsmechanik

Der am weitesten verbreitete Ansatz ist die Verwendung der Festigkeitsmechanik zur Beschreibung des Versagens von Klebverbindungen. Dabei wird eine Spannung oder eine Funktion des Spannungs- oder Verzerrungsfeldes mit einem kritischen Wert – zum Beispiel der Festigkeit – verglichen. Oftmals werden dazu die Spannungsspitzen am Ende der Klebschicht betrachtet, die allerdings bei genauer Betrachtung singularär sind. Viele der geschlossen-analytischen Methoden (siehe Abschnitt 3.3) können diese Spannungssingularität nicht abbilden und weisen dort eine endliche Spannungsspitze auf.

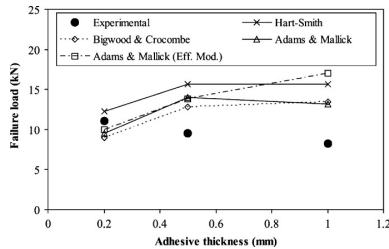
In der Literatur finden sich viele Umsetzungen von festigkeitsmechanischen Kriterien. Dabei kommen verschiedene Formulierungen zum Einsatz. Die Auswertung maximaler Spannungen wurde zum Beispiel von Hart-Smith (1973) und Quispe Rodríguez et al. (2012) verwendet. Die Auswertung der von-Mises-Gestaltsänderungsenergiehypothese wurde von Charalambides et al. (1997), die Auswertung der Hauptnormalspannung wurde etwa von Adams et al. (1986) und Harris u. Adams (1984) verwendet. Ebenfalls wurden für Klebstoffe angepasste Versagenskriterien vorgeschlagen (Schlimmer, 1982).

Goglio et al. (2008) zeigen einen Vergleich von sechs unterschiedlichen Spannungs- und Dehnungskriterien auf Basis der Spannungslösung von Bigwood u. Crocombe (1989). Für die von ihnen untersuchten Experimente ergibt sich für alle betrachteten Kriterien eine deutliche Abweichung der Versagenslasten von der Vorhersage. In der vergleichenden Auswertung von Quispe Rodríguez et al. (2012), in der vier klassische geschlossen-analytische Lösungen unter Nutzung eines Kriteriums maximaler Schub- oder Schälspannungen ausgewertet wurden, ergaben sich Abweichungen von über 30% beim Vergleich mit experimentell ermittelten Versagenslasten.

In der umfassenden Vergleichsstudie von da Silva et al. (2009a,b) wurden zehn lineare und nichtlineare geschlossen-analytische Modelle mit Experimenten verglichen. Die Autoren zeigen im Vergleich mit experimentellen Ergebnissen, dass die Vorhersage der Versagenslast nur schlechte Übereinstimmung liefert. Dabei wurde



**Abbildung 3.6:** Ergebnisse des von da Silva et al. (2009b) durchgeführten Vergleiches verschiedener linearer Modelle mit Experimenten von da Silva et al. (2006). (Bilder aus Originalpublikation übernommen.)



**Abbildung 3.7:** Ergebnisse des von da Silva et al. (2009b) durchgeführten Vergleiches verschiedener nichtlinearer Modelle mit Experimenten von da Silva et al. (2006). (Bild aus Originalpublikation übernommen.)

der Einfluss der Überlappungslänge und der Klebschichtdicke auf die Experimente untersucht. Während bei der Untersuchung des Einflusses der Überlappungslänge die Modelle das Ansteigen der Versagenslast zumindest qualitativ abbilden konnten, wurde der Effekt der Klebschichtdicke von allen Modellen falsch dargestellt. Die Ergebnisse des Vergleichs bei Auswertung der geschlossen-analytischen Modelle mit linear-elastischem Materialverhalten ist in Abbildung 3.6 dargestellt. Die Auswertung des festigkeitsmechanischen Kriteriums ergibt für alle Modelle ein Ansteigen der Versagenslast mit der Klebschichtdicke, während die Experimente den bekannten (vgl. Kapitel 3.2), gegenteiligen Effekt zeigen.

Des Weiteren zeigen da Silva et al. (2009b), dass die Berücksichtigung von nichtlinearen Effekten infolge Plastizität ebenfalls nicht zur Abbildung des Effekts der Klebschichtdicke genügt. Das Ergebnis dieses Vergleichs ist aus der Publikation entnommen und in Abbildung 3.7 gezeigt. Die dort dargestellten Modelle von Hart-



Smith (1973), Bigwood u. Crocombe (1990) und Adams u. Mallick (1992) spiegeln nicht die in Experimenten beobachtete Abhängigkeit von der Klebschichtdicke wider und ergeben tendenziell zu hohe Versagenslasten.

In einigen Publikationen wird der Schluss gezogen, dass die Festigkeit der Klebschicht von der Belastung (Van Noort et al., 1989, Ikegami et al., 1996) sowie von geometrischen Größen, wie etwa der Klebschichtdicke, abhängen (Jarry u. Shenoi, 2006). Umfangreiche materialwissenschaftliche Untersuchungen der Klebschicht von Davies et al. (2009) haben jedoch gezeigt, dass sich die Festigkeit nur geringfügig ändert, wenn die Klebschichtdicke steigt.

Für besonders duktile Klebstoffe, die keine Verfestigung zeigen, hat Crocombe (1989) das Konzept des globalen Fließens vorgeschlagen. Es postuliert Versagen, wenn in der gesamten Fügung Fließen eingetreten ist. Beim Vergleich mit Experimenten mit sehr duktilen Klebstoffen (mehr als 20% Bruchdehnung) zeigt dieses Kriterium gute Ergebnisse und kann auch den Effekt der Klebschichtdicke korrekt abbilden.

Um das Problem der Auswertung der Spannungssingularität am Ende der Klebschicht zu umgehen, bietet sich die Verwendung von nicht-lokalen Festigkeitskriterien an. Dazu wurde von einer Reihe von Autoren die Verwendung der Theorie der kritischen Distanz (Taylor, 2007) vorgeschlagen. Eine solche Auswertung mit der Point-Method für die Bewertung von Fügungen, an denen die Spannungen an einem bestimmten, kritischen Abstand von der Spannungssingularität ausgewertet werden, wurde beispielsweise von John et al. (1991), Haruna et al. (1996), Ribeiro-Ayeh u. Hallström (2003) und Engelstad u. Actis (2003) vorgeschlagen. Eine Betrachtung einer kritischen Fläche um die Spannungssingularität, in der ein Festigkeitskriterium überschritten sein muss, wurde von Clark u. McGregor (1993) und Sheppard et al. (1998) vorgeschlagen. Dabei ist all diesen Kriterien gemein, dass ein zweiter, nicht-physikalischer Längen- bzw. Flächenparameter verwendet wird. Dieser Parameter ist jedoch strukturabhängig und kein Materialparameter. Der Parameter muss in entsprechend gewählten Versuchen ermittelt werden und ist nur für die betrachtete Struktursituation gültig. Clark u. McGregor (1993) vermuten in ihrer Arbeit, dass dieser Parameter seinen Ursprung in bruchmechanischen Überlegungen hat und empfehlen eine weitere Untersuchung dieses Aspektes.

#### 3.4.2 Bruchmechanik

Neben festigkeitsmechanischen Betrachtungen wurden in der Literatur auch eine Reihe an bruchmechanischen Ansätzen zur Bewertung von Klebverbindungen vorgeschlagen. Dabei wird die Entstehung oder das Fortschreiten von Rissen betrachtet. Versagen wird dabei bei Erreichen einer kritischen Energiefreisetzungsrate, eines kritischen Spannungsintensitätsfaktors oder einer kritischen Risspitzenverschiebung postuliert. Bei Betrachtung der Energiefreisetzungsrate ergibt sich die in Abschnitt 2.4 beschriebene Schwierigkeit, dass die Energiefreisetzungsrate der

schwachen Spannungssingularitäten an den Bi-Materialpunkten in Klebverbindungen null ist.

Werden jedoch geschlossen-analytische Näherungslösungen betrachtet, die die Singularität nicht vollständig abbilden, sind die entsprechenden Energiefreisetzungsraten ungleich null. Betrachtungen dieser Art wurden von einigen Autoren vorgeschlagen. Die älteste Arbeit, die diesem Konzept folgt, ist die Arbeit von Malyshev u. Salganik (1965), in der ein einfaches Balkenmodell verwendet wird um die Energiefreisetzung bei der Ablösung eines geklebten Streifens zu berechnen. In diesem Modell wurde, wie auch in folgenden Erweiterungen (Williams, 1988, Suo u. Hutchinson, 1990), der Einfluss der Klebschicht auf die Energiefreisetzungsrate vernachlässigt. Da diese jedoch an der Energiefreisetzungsrate von Klebverbindungen einen großen Anteil hat, wurden verbesserte Modelle zur Bestimmung der Energiefreisetzungsrate vorgeschlagen. Das Modell von Hu et al. (1992) nutzt dazu die Kinematik der Volkersen-Lösung. Von Krenk (1992), Fraise u. Schmit (1993) sowie von Hu (1995) wurden Modelle auf Basis der Goland-Reissner-Lösung vorgeschlagen. Hierbei verwenden die zwei Letzteren eine Umsetzung des wegunabhängigen J-Integrals (Rice, 1968, Gross u. Seelig, 2011) zur Bestimmung der Energiefreisetzungsrate. Tong (1996) gibt ein Modell auf Basis der Lösung von Bigwood u. Crocombe (1989) an. Die Lösung von Fernlund u. Spelt (1991) wird von Papini et al. (1994) genutzt, um unter Nutzung des J-Integrals die Energiefreisetzungsrate zu bestimmen. Eine Erweiterung auf unsymmetrische Klebverbindungen wurde von Alfredsson u. Högberg (2007) vorgeschlagen.

Für die Auswertung des bruchmechanischen Energiekriteriums wurden verschiedene Formulierungen vorgeschlagen. Die Energiefreisetzungsraten der beiden vorhandenen Rissöffnungsmoden (I und II) können einfach addiert und mit der kritischen Energiefreisetzungsrate – der Bruchzähigkeit – verglichen werden. Dies ist die Standardvorgehensweise bei der Auswertung des J-Integrals (Hu et al., 1992, Fraise u. Schmit, 1993, Hu, 1995), da dieses die gesamte Energiefreisetzungsrate umfasst. Für den Fall, dass beide Anteile der Energiefreisetzungsrate einzeln betrachtet werden, wurden verschiedene Kriterien für die Modeninteraktion vorgeschlagen. So wird etwa die Bruchzähigkeit als Funktion des Verhältnisses der beiden Energiefreisetzungsraten  $\psi = \mathcal{G}_I/\mathcal{G}_{II}$ <sup>31</sup> eingeführt. Neben trigonometrischen Funktionen (Charalambides et al., 1992) kommen dabei oft Polynomfunktionen (Papini et al., 1994, Fernlund et al., 1994) zum Einsatz. Die Bestimmung der Freiwerte (meist zwei oder drei) dieser Funktionen erfolgt jeweils durch Kurvenanpassung an experimentelle Ergebnisse. Weitere bruchmechanische Bewertungen von Klebverbindungen verwenden ein Interaktionsgesetz der Form

$$\left(\frac{\mathcal{G}_I}{\mathcal{G}_{I,c}}\right)^\alpha + \left(\frac{\mathcal{G}_{II}}{\mathcal{G}_{II,c}}\right)^\beta = 1 \quad (3.56)$$

mit unterschiedlich gewählten Exponenten  $\alpha$  und  $\beta$  (Chai, 1988, Tong, 1998, Cheuk u. Tong, 2002).

<sup>31</sup>Dieser Winkel wird im Englischen als *mode mixity* bezeichnet.

Ferner gibt es Bewertungszugänge, die das K-Konzept für die Bewertung von Klebverbindungen verwenden. Da jedoch keine Rissspitzensingularität vorliegt, müssen verallgemeinerte Spannungsintensitätsfaktoren<sup>32</sup> (Sinclair et al., 1984, Groth, 1988) verwendet werden. Adams u. Harris (1987) nutzen diese Methode, um den Effekt der lokalen Fügeteilgeometrie auf das Versagen von einschnittigen Überlappungsfügungen zu untersuchen. Ebenfalls mit generalisierten Spannungsintensitätsfaktoren sind die Versagenskonzepte der Parameterstudien von Groth (1988), Hattori (1991) und Goglio u. Rossetto (2010) formuliert.

Die genannten bruchmechanischen Methoden zeigen teilweise eine gute Übereinstimmung mit Experimenten. Es ist jedoch zu beachten, dass bei den verwendeten Bruchkriterien nicht wenige Parameter zu bestimmen sind. Die Parameter der Bruchkriterien müssen dabei für jede Kombination von Fügeteil- und Klebschichtmaterial neu ermittelt werden und zeigen häufig eine Abhängigkeit von Strukturparametern (Kinloch u. Shaw, 1981, Hunston et al., 1989). Damit sind die Versagensparameter keine Material- sondern Strukturparameter. Auch erlaubt etwa eine Auswertung mit einer an Experimente gefitteten Bruchzähigkeit keine Analyse der physikalischen Zusammenhänge des Versagensverhaltens.

Wie auch bei der Anwendung der festigkeitsmechanischen Kriterien gibt es bruchmechanische Modelle, die einen internen Längenparameter für die Bewertung verwenden. Anderson u. DeVries (1987, 1989) haben ein solches Konzept vorgeschlagen, in dem ein imaginärer Riss<sup>33</sup> am Rand der Klebschicht angenommen wird. Durch das Vorhandensein eines Risses ist es möglich, klassische bruchmechanische Methoden anzuwenden und die Energiefreisetzungsrate auszuwerten. Borgmeier u. DeVries (1993) verwenden dieses Konzept in ihrer Untersuchung zum Effekt von angeschrägten Fügeteilen zur Steigerung der Versagenslast und zeigen eine relativ gute Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen. Reedy Jr (2000) wendete das Konzept der imaginären Risse auf Stoßfügungen an. Der Autor hebt zwar den pragmatischen Nutzen des Konzeptes hervor, kritisiert jedoch die fehlende physikalische Relevanz. Bei der Untersuchung von einschnittigen Versagenslasten konnte das Konzept ebenfalls mit guten Ergebnissen eingesetzt werden (Kim u. Lee, 2008), doch sind Experimente nötig, um die Größe des imaginären Risses zu bestimmen. Der größte Nachteil dieses Konzeptes ist – wie auch bei der Theorie der kritischen Distanz –, dass es nicht auf einem physikalischen Verständnis des Versagensverhaltens von Klebverbindungen fußt. Obendrein ist die Größe des imaginären Risses kein Materialparameter und hängt von der jeweiligen Struktursituation ab.

<sup>32</sup>Diese werden im Englischen als *Generalized Stress Intensity Factors* (GSIF) oder *Notch Stress Intensity Factors* (NSIF) bezeichnet.

<sup>33</sup>In der Publikation als *inherent flaw* bezeichnet.

### **3.4.3 Schädigungsmechanik**

Ein weiterer möglicher Zugang zur Untersuchung des Versagensverhaltens von Klebverbindungen stellt die Schädigungsmechanik dar. Das Versagen wird dabei als kontinuierliche Schädigung gemäß einem vorgegebenen Schädigungsgesetz modelliert. Die Initiierung von Schädigung sowie deren Fortschritt kann mit Hilfe der Schädigungsmechanik abgebildet werden. Eine Annahme eines bestehenden Risses oder Defektes ist nicht nötig.

Die meisten Untersuchungen von Klebverbindungen mit Hilfe der Schädigungsmechanik nutzen dabei numerische Methoden. Üblicherweise kommen Umsetzungen der Schädigungsmechanik in der Finite-Elemente-Methode zum Einsatz (Liljedahl et al., 2006, Stigh et al., 2010, da Silva u. Campilho, 2012). Damit ist eine Betrachtung beliebig ausgeführter Klebverbindungen und Geometrievariationen möglich. Es werden dabei eine Vielzahl an unterschiedlichen Definitionen des Schädigungsgesetzes verwendet. Ein bilineares Gesetz wurde etwa von Liljedahl et al. (2006), ein trilineares, trapezförmiges wurde von Kafkalidis u. Thouless (2002) und ein Gesetz auf Basis von Chebyshev-Polynomen wurde von Sørensen u. Kirkegaard (2006) verwendet.

Neben numerischen Umsetzungen der Schädigungsmechanik finden sich auch geschlossen-analytische Umsetzungen für die Untersuchung von Klebverbindungen. Unter Nutzung der Volkersen-Lösung wurde von Chataigner et al. (2010) eine iterative Lösung für das Problem der Ablösung einer verklebten Bewehrung beschrieben. Eine Berücksichtigung von Schub- und auch Schälspannungen erfolgt in der analytischen Lösung von Ascione (2009) für den Fall von einschnittigen und zweischnittigen Überlappungsfügungen. Diese Lösungen zeichnen sich gegenüber einer numerischen Umsetzung durch wesentlich höhere Effizienz, aber auch durch geringere Genauigkeit aus.

Eine sehr gute Übersicht über den aktuellen Stand der Forschung bezüglich Umsetzungen der Schädigungsmechanik mit numerischen Methoden für die Bewertung von Klebverbindungen ist im Buch von da Silva u. Campilho (2012) gegeben. Dabei wird ausführlich über die unterschiedlichen Formulierungen von Schädigungsgesetzen und die Modellierung von Mixed-Mode-Belastungen berichtet. Es werden die unterschiedlichen Methoden zur Bestimmung von geeigneten Schädigungsgesetzen und den entsprechenden Schädigungsparametern, die in der Literatur angegeben sind, verglichen. Die auftretenden Konvergenzprobleme bei der numerischen Umsetzung der Schädigungsmechanik und die Abhängigkeit der Ergebnisse von nicht-physikalischen Parametern, wie etwa der Netzfeinheit oder Regularisierungsparametern, werden von da Silva u. Campilho (2012) ebenfalls diskutiert.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass numerische Umsetzungen der Schädigungsmechanik sehr vielseitig eingesetzt werden können, um das Versagensverhalten von Klebverbindungen kontinuierlich zu beschreiben. Dabei werden auftretende Versagensprozesse verschmiert dargestellt; somit können sowohl spröde wie auch

duktile Vorgänge ohne Beachtung der tatsächlichen physikalischen Zusammenhänge untersucht werden. Die größten Nachteile dieser Methode(n) ist jedoch die aufwändige Identifizierung der Schädigungsgesetze mit den jeweiligen Parametern sowie Konvergenzprobleme in der numerischen Umsetzung.



## Kapitel 4

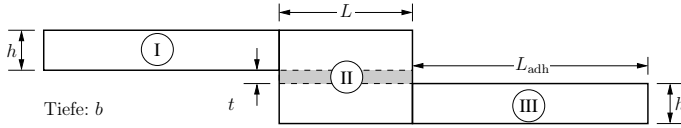
### Spannungsanalyse von Klebverbindungen mittels semi-analytischem Variationsansatz

*Es wird ein semi-analytisches Verfahren für die Berechnung des Deformations- und Spannungszustandes in Klebverbindungen dargestellt. Die Betrachtung erfolgt zweidimensional unter Annahme eines ebenen Verzerrungszustandes. Die Klebverbindung wird dabei in rechteckige Teilkörper aufgeteilt. Diese werden in mathematische Schichten eingeteilt, auf deren Grenzen a priori unbekannte Verschiebungsfunktionen für die ebenen Verschiebungen eingeführt werden. In Diskretisierungsrichtung werden lineare Ansatzfunktionen verwendet. Die Formänderungsenergiegedichte lässt sich damit als Funktion der unbekannten Verschiebungsfunktionen darstellen. Aus dem Prinzip des Stationärwerts des Gesamtpotentials ergibt sich dann ein Variationsproblem, dessen Lösung zu einem Differentialgleichungssystem vierter Ordnung für die Verschiebungsfunktionen führt. Mit geeignet formulierten Rand- und Übergangsbedingungen kann dieses für die entsprechenden Randbedingungen gelöst werden. Die Ergebnisse sind konvergent und zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit einer Finite-Elemente-Referenzlösung. Das Lösungsverfahren zeichnet sich durch einen geringen Rechenaufwand aus und eignet sich damit besonders zur effizienten Parameteranalyse in Optimierungs- oder Vorauslegungsprozessen.*

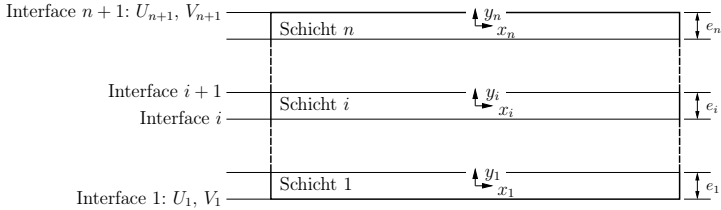
#### 4.1 Stand der Wissenschaft

In vielen praktisch relevanten elastizitätstheoretischen Randwertproblemen kann keine geschlossen-analytische Lösung gefunden werden. Dann werden Näherungsverfahren benötigt, um eine Lösung zu ermitteln. Die wohl bekanntesten Vertreter von Näherungsverfahren sind das Rayleigh-Ritzsche Variationsverfahren, das Galerkin-Verfahren oder deren weit verbreiteter Abkömmling, die Finite-Elemente-Methode. Ein weiteres, recht verbreitetes numerisches Verfahren ist die Rand-Elemente-Methode<sup>34</sup>. Das in diesem Kapitel vorgestellte Verfahren lässt sich als semi-analytisches Verfahren bezeichnen, da lediglich in einer Raumrichtung eine numerische Diskretisierung vorgenommen wird und in der verbleibenden Richtung (zunächst unbekannte) analytische Funktionen verwendet werden. Diese Vorgehensweise wird auch als (diskretisierte) Kantorovich-Methode bezeichnet (Zienkiewicz u. Zhu, 2005, Zienkiewicz u. Taylor, 2005). Da zur Lösung für beliebige

<sup>34</sup>Engl.: Boundary-Element-Method (BEM)



**Abbildung 4.1:** Aufteilung einer einschnittigen Überlappungsfügung in drei rechteckige Teilkörper.



**Abbildung 4.2:** Aufteilung des rechteckigen Teilkörpers in mathematische Schichten.

Diskretisierungen numerische Methoden verwendet werden, ist der Übergang von semi-analytischen zu numerischen Methoden fließend. Solche Lösungen wurden in den letzten Jahrzehnten bereits für unterschiedliche Struktursituationen vorgeschlagen (Giavotto et al., 1983, Morandini et al., 2010, Wolf, 2003, Mittelstedt, 2006, Artel, 2007, Dieringer u. Becker, 2012, Jung u. Becker, 2013), wobei oft halbunendliche Strukturen betrachtet werden. Eine Umsetzung dieser Methodik in Form der Finite-Elemente-Methodik wird auch als Rand-Finite-Elemente-Methode<sup>35</sup> bezeichnet. In den letzten Jahren wurde eine Anwendung dieser Methodik auf Klebverbindungen von Yousefsani u. Tahani (2013) entwickelt, doch diese Umsetzung zeigt ein ungünstiges Konvergenzverhalten und ist nicht ausreichend mit Referenzrechnungen validiert.

## 4.2 Grundkonzept der semi-analytischen Lösung

In diesem Lösungsverfahren wird der Deformationszustand in der Klebverbindung mit Hilfe des Prinzips des Stationärwerts des Gesamtpotentials ermittelt. Im Folgenden sei eine einschnittige Überlappungsfügung mit Fügeteildicke  $h$ , Klebschichtdicke  $t$ , Überlappungslänge  $L$ , äußerer Fügeteillänge  $L_{adh}$  und Tiefe  $b$  betrachtet. Dazu wird der Deformationszustand des Körpers durch eine Kombination von a priori unbekannten analytischen Funktionen und numerischen Interpolationsfunktionen

<sup>35</sup>Engl.: Scaled Boundary Finite Element Method (SBFEM)



beschrieben. Dabei werden die einzelnen rechteckigen Teilkörper der Klebverbindung zunächst einzeln betrachtet. Es ergeben sich für die Fügung drei Teilkörper. Die Einteilung der Teilkörper ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Diese rechteckigen Teilkörper werden in  $n$  Schichten mit beliebiger Dicke  $e_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) unterteilt, siehe Abbildung 4.2. Dabei ist  $E$  die Gesamtdicke des Teilkörpers. Auf den  $n + 1$  Interfaces<sup>36</sup> dieser Schichten wird der Deformationszustand durch die unbekannten Verschiebungsfunktionen  $U_j(x)$  und  $V_j(x)$  ( $j = 1, \dots, n + 1$ ) beschrieben. Die lokalen Koordinaten  $x_i, y_i$  haben ihren Ursprung in der Mitte der jeweiligen Schicht und hängen mit dem globalen Koordinatensystem  $x, y$  des rechteckigen Teilkörpers der Höhe  $h$  (siehe Abbildung 4.3) wie folgt zusammen:

$$x_i = x, \quad (4.1)$$

$$y_i = y + \frac{h}{2} - \sum_{k=1}^{i-1} e_k - \frac{e_i}{2}. \quad (4.2)$$

Innerhalb der Schichten ergeben sich die Deformationen aus linearer Interpolation der Verschiebungsfunktionen auf den Interfaces der jeweiligen Schicht:

$$u_i(x, y_i) = U_i(x)\chi_1(y_i) + U_{i+1}(x)\chi_2(y_i), \quad (4.3)$$

$$v_i(x, y_i) = V_i(x)\chi_1(y_i) + V_{i+1}(x)\chi_2(y_i). \quad (4.4)$$

Dabei sind  $\chi_{1,2}$  die linearen Ansatzfunktionen in Dickenrichtung:

$$\chi_{1,2}(y_i) = \frac{1}{2} \mp \frac{y_i}{e_i}. \quad (4.5)$$

Die entsprechenden Verzerrungen in den Schichten ergeben sich zu:

$$\varepsilon_i^{xx} = \frac{du_i}{dx} = U'_i(x)\chi_1(y_i) + U'_{i+1}(x)\chi_2(y_i), \quad (4.6)$$

$$\varepsilon_i^{yy} = \frac{dv_i}{dy_i} = \frac{V_{i+1}(x) - V_i(x)}{e_i}, \quad (4.7)$$

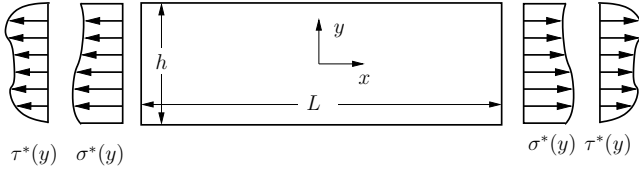
$$\varepsilon_i^{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{du_i}{dy_i} + \frac{dv_i}{dx} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{U_{i+1}(x) - U_i(x)}{e_i} + V'_i(x)\chi_1(y_i) + V'_{i+1}(x)\chi_2(y_i) \right); \quad (4.8)$$

aus diesen lassen sich die Spannungen in der Struktur berechnen:

$$\begin{bmatrix} \sigma_i^{xx} \\ \sigma_i^{yy} \\ \sigma_i^{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^i & k_{12}^i & 0 \\ k_{12}^i & k_{22}^i & 0 \\ 0 & 0 & k_{66}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_i^{xx} \\ \varepsilon_i^{yy} \\ \varepsilon_i^{xy} \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Darin sind die Steifigkeitswerte der einzelnen Schichten unter Annahme des ebenen Verzerrungszustandes im vorliegenden Fall des isotropen Materialverhaltens von

<sup>36</sup>Wozu auch die obere und untere Deckfläche gezählt werden.



**Abbildung 4.3:** Rechteckiger Teilkörper mit Randbedingungen. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt in der Mitte des Teilkörpers.

Fügeteilen und Klebschicht wie folgt:

$$\begin{aligned} k_{11}^i &= \frac{(1 - \nu_i) E_i}{(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)}, & k_{22}^i &= k_{11}^i, \\ k_{12}^i &= \frac{\nu_i E_i}{(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)}, & k_{66}^i &= \frac{E_i}{(1 + \nu_i)} \end{aligned} \quad (4.10)$$

mit dem Elastizitätsmodul  $E_i$  und der Querkontraktionszahl  $\nu_i$  der jeweiligen Schicht.

### 4.3 Variationsproblem

Es gilt folgender Ausdruck für die Gesamtenergie eines Teilkörpers, wie in Abbildung 4.3 dargestellt:

$$\Pi = \int_V U dV - \int_V \mathbf{f} \mathbf{u} dV - \int_{\partial V_i} \mathbf{t}^* \mathbf{u} dA. \quad (4.11)$$

In der vorliegenden Modellierung werden keine Volumenkräfte berücksichtigt. Folglich entfällt der zweite Term dieser Gleichung. Nur an den Rändern  $x = \text{const}$  wirkt eine äußere Belastung  $\mathbf{t}^* = [\sigma^*(y), \tau^*(y)]^T$ . Es ergibt sich damit folgender Ausdruck für das Gesamtpotential:

$$\Pi = \int_V U dV - \left[ \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{t}^* \mathbf{u} dy \right]_{x=-L/2}^{L/2}. \quad (4.12)$$

Das Volumenintegral der Formänderungsenergiedichte (2.21) kann in ein Doppelintegral in Längs- und Dickenrichtung aufgeteilt werden. Das Integral in Dickenrichtung kann gelöst werden und man erhält

$$\Pi = \int_{-L/2}^{L/2} P dx - \left[ \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{t}^* \mathbf{u} dy \right]_{x=-L/2}^{L/2}. \quad (4.13)$$

$P$  ist eine skalare Formänderungsenergiegedichtefunktion, die von den Verschiebungsfunktionen und ihren Ableitungen abhängt:

$$P = P(x) = b \sum_{i=1}^n \int_{-e_i/2}^{e_i/2} U \, dy_i = \begin{bmatrix} \Omega \\ \Omega' \end{bmatrix}^\top \hat{S} \begin{bmatrix} \Omega \\ \Omega' \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

mit dem Vektor der Verschiebungsfunktionen

$$\Omega = \begin{bmatrix} [U_i] \\ [V_i] \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Dabei enthält die Matrix  $\hat{S}$  die entsprechenden Elastizitäts- und Geometriegrößen:

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} \hat{S}_1 & 0 & 0 & \hat{S}_6 \\ 0 & \hat{S}_2 & \hat{S}_5 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{S}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{S}_4 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

mit den Tridiagonalmatrizen  $\hat{S}_1, \dots, \hat{S}_6$  der Größe  $(n+1) \times (n+1)$ , wobei im Folgenden jeweils die Diagonalelemente der ersten Zeile 1, der mittleren Zeilen  $j$  ( $j = 2, \dots, n$ ) und der letzten Zeile  $n+1$  gegeben sind:

$$\hat{S}_1 = \begin{Bmatrix} 1 & : & \frac{bk_{661}}{2e_1} & -\frac{bk_{661}}{e_1} \\ j = 2, \dots, n & : & 0 & \frac{bk_{66j-1}}{2e_{j-1}} + \frac{bk_{66j}}{2e_j} & -\frac{bk_{66j}}{e_j} \\ n+1 & : & 0 & 0 & \frac{bk_{66n}}{2e_n} \end{Bmatrix}, \quad (4.17)$$

$$\hat{S}_2 = \begin{Bmatrix} 1 & : & \frac{bk_{221}}{2e_1} & -\frac{bk_{221}}{e_1} \\ j = 2, \dots, n & : & 0 & \frac{bk_{22j-1}}{2e_{j-1}} + \frac{bk_{22j}}{2e_j} & -\frac{bk_{22j}}{e_j} \\ n+1 & : & 0 & 0 & \frac{bk_{22n}}{2e_n} \end{Bmatrix}, \quad (4.18)$$

$$\hat{S}_3 = \begin{Bmatrix} 1 & : & \frac{be_1 k_{111}}{6} & \frac{be_1 k_{111}}{6} \\ j = 2, \dots, n & : & 0 & \frac{be_{j-1} k_{11j-1}}{6} + \frac{be_j k_{11j}}{6} & \frac{be_j k_{11j}}{6} \\ n+1 & : & 0 & 0 & \frac{be_n k_{11n}}{6} \end{Bmatrix}, \quad (4.19)$$

$$\hat{S}_4 = \begin{Bmatrix} 1 & : & \frac{be_1 k_{661}}{6} & \frac{be_1 k_{661}}{6} \\ j = 2, \dots, n & : & 0 & +\frac{be_{j-1} k_{66j-1}}{6} - \frac{be_j k_{66j}}{6} & \frac{be_j k_{66j}}{6} \\ n+1 & : & 0 & 0 & \frac{be_n k_{66n}}{6} \end{Bmatrix}, \quad (4.20)$$

$$\hat{S}_5 = \begin{Bmatrix} 1 & : & -\frac{bk_{121}}{2} & -\frac{bk_{121}}{2} \\ j = 2, \dots, n & : & \frac{bk_{121}}{2} & \frac{bk_{12j-1}}{2} - \frac{bk_{12j}}{2} & -\frac{bk_{12j}}{2} \\ n+1 & : & \frac{bk_{121}}{2} & 0 & \frac{bk_{12n}}{2} \end{Bmatrix}, \quad (4.21)$$

$$\hat{S}_6 = \begin{Bmatrix} 1 & : & -\frac{bk_{661}}{2} & -\frac{bk_{661}}{2} \\ j = 2, \dots, n & : & \frac{bk_{661}}{2} & \frac{bk_{66j-1}}{2} - \frac{bk_{66j}}{2} & -\frac{bk_{66j}}{2} \\ n+1 & : & \frac{bk_{661}}{2} & \frac{bk_{66n}}{2} & \frac{bk_{66n}}{2} \end{Bmatrix}. \quad (4.22)$$

Wendet man nun das Prinzip des Stationärwerts des Gesamtpotentials an und fordert, dass die Variation des Gesamtpotentials verschwindet, erhält man nach partieller Integration und Einsetzen des Zusammenhangs der Verschiebungen mit den Verschiebungsfunktionen (4.6) und (4.7):

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \int_{-L/2}^{L/2} \left( \frac{\partial P}{\partial \Omega} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial P}{\partial \Omega'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial P}{\partial \Omega''} \right) \right) \delta\Omega \, dx \\ & + \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial \Omega'} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial P}{\partial \Omega''} \right) \right) \delta\Omega \right]_{x=-L/2}^{L/2} + \left[ \frac{\partial P}{\partial \Omega''} \delta\Omega \right]_{x=-L/2}^{L/2} \\ & - \left[ \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{\sigma*} \\ \mathbf{T}^{\tau*} \end{bmatrix} \delta\Omega \right]_{x=-L/2}^{L/2} = 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Darin sind  $\mathbf{T}^{\sigma*}$  und  $\mathbf{T}^{\tau*}$  die mit den Ansatzfunktionen gewichteten, schichtweise integrierten Normal- und Schubspannungen auf den Rändern:

$$\mathbf{T}^{\sigma*} = b \begin{bmatrix} \int_{-e_1/2}^{e_1/2} \sigma^*(y) \chi_1(y_1) dy_1 \\ \vdots \\ \int_{-e_i/2}^{e_i/2} \sigma^*(y) \chi_1(y_i) dy_i + \int_{-e_{i-1}/2}^{e_{i-1}/2} \sigma^*(y) \chi_2(y_{i-1}) dy_{i-1} \\ \vdots \\ \int_{-e_{n+1}/2}^{e_{n+1}/2} \sigma^*(y) \chi_2(y_{n+1}) dy_{n+1} \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

$$\mathbf{T}^{\tau*} = b \begin{bmatrix} \int_{-e_1/2}^{e_1/2} \tau^*(y) \chi_1(y_1) dy_1 \\ \vdots \\ \int_{-e_i/2}^{e_i/2} \tau^*(y) \chi_1(y_i) dy_i + \int_{-e_{i-1}/2}^{e_{i-1}/2} \tau^*(y) \chi_2(y_{i-1}) dy_{i-1} \\ \vdots \\ \int_{-e_{n+1}/2}^{e_{n+1}/2} \tau^*(y) \chi_2(y_{n+1}) dy_{n+1} \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Die Formänderungsenergiedichte hängt im Falle des linearisierten Verzerrungstensors nur von den Verschiebungen und ihren ersten Ableitungen ab. Die Ableitungen nach den zweifach abgeleiteten Verschiebungsfunktionen  $\partial/\partial\Omega''$  in der Variation

des Gesamtpotentials (4.23) müssen daher verschwinden und es verbleibt somit der folgende Ausdruck:

$$\delta\Pi = \int_{-L/2}^{L/2} \left( \frac{\partial P}{\partial \boldsymbol{\Omega}} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial P}{\partial \boldsymbol{\Omega}'} \right) \right) \delta \boldsymbol{\Omega} \, dx + \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial \boldsymbol{\Omega}'} - \left[ \mathbf{T}^{\sigma*} \right] \right) \delta \boldsymbol{\Omega} \right]_{x=-L/2}^{L/2} = 0. \quad (4.26)$$

Diese Stationaritätsbedingung muss für beliebige, kinematisch zulässige Variationen der Verschiebungsfunktionen  $\delta \boldsymbol{\Omega}$  gültig sein. Somit ergibt sich aus der Klammer des ersten Terms die bekannte Euler-Lagrangesche-Differentialgleichung der Variationsrechnung:

$$\frac{\partial P}{\partial \boldsymbol{\Omega}} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial P}{\partial \boldsymbol{\Omega}'} \right) = 0. \quad (4.27)$$

Aus dem zweiten Term der Variation (4.26) ergeben sich die entsprechenden Randbedingungen am Rand des Gebietes. Da das Produkt der Variation mit dem Klammerausdruck null sein muss, ergeben sich zwei mögliche Randbedingungen:

$$\left[ \left( \frac{\partial P}{\partial \boldsymbol{\Omega}'} - \left[ \mathbf{T}^{\sigma*} \right] \right) \right]_{x=-L/2}^{L/2} = 0, \quad (4.28)$$

$$[\delta \boldsymbol{\Omega}]_{x=-L/2}^{L/2} = 0. \quad (4.29)$$

Dabei wird Erstere als dynamische Randbedingung und Letztere als geometrische Randbedingung bezeichnet (Eschenauer u. Schnell, 1981). Die dynamische Randbedingung ist die Spannungsrandbedingung und die geometrische Randbedingung entspricht einer vorgegebenen Verschiebung.

## 4.4 Lösung des Differentialgleichungssystems

Aus der Euler-Lagrangesche-Differentialgleichung (4.27) ergeben sich  $2(n+1)$  homogene, gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die Verschiebungsfunktionen  $U_i$  und  $V_i$ . Das Differentialgleichungssystem lässt sich schreiben als:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_4 \end{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}_2 \\ \mathbf{K}_5 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}' + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_3 & \\ 0 & \mathbf{K}_6 \end{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}'' = 0. \quad (4.30)$$

Die Matrizen  $\mathbf{K}_1$  bis  $\mathbf{K}_6$  ergeben sich unter Berücksichtigung von Gleichung (4.14) zu<sup>37</sup>:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_1 &= \hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{S}}_1^\top, & \mathbf{K}_2 &= \hat{\mathbf{S}}_6 - \hat{\mathbf{S}}_5^\top, \\ \mathbf{K}_3 &= -(\hat{\mathbf{S}}_3 + \hat{\mathbf{S}}_3^\top), & \mathbf{K}_4 &= \hat{\mathbf{S}}_2 + \hat{\mathbf{S}}_2^\top, \\ \mathbf{K}_5 &= \hat{\mathbf{S}}_5 + \hat{\mathbf{S}}_6^\top, & \mathbf{K}_6 &= -(\hat{\mathbf{S}}_4 + \hat{\mathbf{S}}_4^\top).\end{aligned}\quad (4.31)$$

Führt man den Vektor

$$\boldsymbol{\psi} = [\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}']^\top \quad (4.32)$$

ein, so lässt sich das Differentialgleichungssystem (4.30) in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung überführen und in der Standardform eines Eigenwertproblems schreiben:

$$\boldsymbol{\psi}' = \mathbf{M}\boldsymbol{\psi} \quad (4.33)$$

mit der  $4(n+1) \times 4(n+1)$ -Matrix  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{K}_3^{-1}\mathbf{K}_1 & 0 & 0 & -\mathbf{K}_3^{-1}\mathbf{K}_2 \\ 0 & -\mathbf{K}_6^{-1}\mathbf{K}_4 & -\mathbf{K}_6^{-1}\mathbf{K}_5 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

Die Systemmatrix  $\mathbf{M}$  hat sechs Nulleigenwerte. Zu diesen Eigenwerten gibt es jedoch nur zwei linear unabhängige Eigenvektoren, die den Starrkörperverschiebungen entsprechen. Analysiert man die Dimensionen der Kerne der Matrix  $\mathbf{M}$  und ihrer Potenzen  $\mathbf{M}^s$ , kann man die Größe der zugehörigen Jordanblöcke bestimmen:

$$\mathbf{d}_s = \dim(\text{Kern}(\mathbf{M}^s)) - \dim(\text{Kern}(\mathbf{M}^{s-1})) = [0, 1, 0, 1]. \quad (4.35)$$

Es gibt also einen Jordanblock der Größe zwei und einen weiteren der Größe vier. Die Hauptvektoren  $\mathbf{v}_j^{I/II}$  müssen somit bei entsprechender Wahl des Startvektors aus den entsprechenden Jordanketten

$$(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_{j+1}^{I/II} = \mathbf{v}_j \quad (4.36)$$

bestimmt werden. Dazu muss für eine verbesserte numerische Konditionierung eine Orthogonalisierung der Kerne vorgenommen werden. Mit den Hauptvektoren

---

<sup>37</sup>Dabei gilt für das auftretende Matrixprodukt der allgemeine Zusammenhang:  $\frac{\partial \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{x}^\top (\mathbf{A}^\top + \mathbf{A})$

ergeben sich dann folgende Lösungsanteile aus den Nulleigenwerten:

$$\psi_{\lambda=0} = \left\{ \begin{aligned} &v_1^I, v_1^I x + v_2^I, v_1^I \frac{x^2}{2} + v_2^I x + v_3^I, v_1^I \frac{x^3}{6} + v_2^I \frac{x^2}{2} + v_3^I x + v_4^I, \\ &v_1^{II}, v_1^{II} x + v_2^I \end{aligned} \right\}. \quad (4.37)$$

Des Weiteren ergeben sich aus den rein reellen Eigenwerten  $\lambda_{\mathbb{R}} = \pm a$  mit den Eigenvektoren  $v_{\mathbb{R}} = \kappa^{\pm}$  folgende Lösungsanteile:

$$\psi_{\lambda_{\mathbb{R}}} = \left\{ \kappa^+ e^{+\lambda_{\mathbb{R}} x}, \kappa^- e^{-\lambda_{\mathbb{R}} x} \right\}. \quad (4.38)$$

Aus den komplexen Eigenwerten, die ebenfalls positiv und negativ sowie komplex konjugiert auftreten, also  $\lambda_{\mathbb{C}} = \pm b \pm ci$  mit den entsprechenden Eigenvektoren  $v_{\mathbb{C}} = \kappa_{\mathbb{R}}^{\pm} \pm \kappa_{\mathbb{C}} i$ , ergeben sich folgende Lösungsanteile:

$$\psi_{\lambda_{\mathbb{C}}} = \left\{ \begin{aligned} &(\kappa_{\mathbb{R}}^+ + \kappa_{\mathbb{C}} i) e^{(+b+ci)x}, \\ &(\kappa_{\mathbb{R}}^+ - \kappa_{\mathbb{C}} i) e^{(+b-ci)x}, \\ &(\kappa_{\mathbb{R}}^- + \kappa_{\mathbb{C}} i) e^{(-b+ci)x}, \\ &(\kappa_{\mathbb{R}}^- - \kappa_{\mathbb{C}} i) e^{(-b-ci)x} \end{aligned} \right\}. \quad (4.39)$$

Durch Linearkombination dieser Lösungsanteile erhält man folgende reellwertige Lösungsanteile:

$$\psi_{\lambda_{\mathbb{C}}} = \left\{ \begin{aligned} &e^{+bx} (\kappa_{\mathbb{R}}^+ \cos(cx) + \kappa_{\mathbb{C}} \sin(cx)), \\ &e^{+bx} (\kappa_{\mathbb{R}}^+ \sin(cx) - \kappa_{\mathbb{C}} \cos(cx)), \\ &e^{-bx} (\kappa_{\mathbb{R}}^- \cos(cx) + \kappa_{\mathbb{C}} \sin(cx)), \\ &e^{-bx} (\kappa_{\mathbb{R}}^- \sin(cx) - \kappa_{\mathbb{C}} \cos(cx)) \end{aligned} \right\}. \quad (4.40)$$

Wie auch bei den Lösungsanteilen der rein reellen Eigenwerte wäre eine weitere Linearkombination der Lösungsanteile möglich. Dabei würden dann Sinus Hyperbolicus- und Kosinus Hyperbolicusfunktionen auftreten. Dies ist jedoch – wie im Folgenden erklärt – für die numerische Auswertung der Randbedingungen unvorteilhaft.

Alle diese Lösungsanteile (4.37), (4.38) und (4.40) bilden das Fundamentalsystem der Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung. Die Gesamtlösung ergibt sich aus einer Linearkombination dieser Lösungsanteile. Dabei wird jeder Lösungsanteil mit einer Konstanten gewichtet. Die insgesamt  $4(n+1)$  freien Konstanten müssen aus eben sovielen Randbedingungen ermittelt werden. Die Auswertung der Randbedingungen führt auf ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der freien Konstanten:

$$AC = R. \quad (4.41)$$

Dieses Gleichungssystem ist jedoch numerisch schlecht konditioniert. Es treten gleichzeitig Terme der Art  $e^{-\lambda \frac{L}{2}}$  und  $e^{\lambda \frac{L}{2}}$  auf, die insbesondere bei größeren Eigenwerten zu Einträgen in der Matrix  $\mathbf{A}$  mit vollkommen anderen Größenordnungen führen. Dadurch entstehen beim Lösen des Gleichungssystems erhebliche numerische Fehler. Dieses Problem kann umgangen werden, wenn bei der Formulierung der Lösungsanteile eine Verschiebung der Koordinate  $x$  vorgenommen wird. Dazu wird die Koordinate  $x$  bei den Termen mit abklingender Exponentialfunktion durch  $(x + \frac{L}{2})$  und bei den aufklingende Exponentialfunktion durch  $(x - \frac{L}{2})$  ersetzt. Dies entspricht einer Multiplikation der Lösungsanteile mit einem konstanten Wert ( $e^{\lambda \frac{L}{2}}$  bzw.  $e^{-\lambda \frac{L}{2}}$ ) und hat daher keinen Einfluss auf die Gültigkeit der Lösung. Durch diese Verschiebung der Koordinaten ist die Matrix  $\mathbf{A}$  wesentlich besser konditioniert und es treten keine signifikanten numerischen Fehler beim Lösen des Gleichungssystems (4.41) auf.

Wird der rechteckige Teilkörper feiner diskretisiert, also in dünnere Schichten aufgelöst, müssen entsprechend mehr Verschiebungsfunktionen bestimmt werden. Dabei wird jedoch der Quotient des größten und kleinsten Realteils der Eigenwerte der Systemmatrix  $\mathbf{M}$  immer größer. Das entsprechende Eigenwertproblem wird dementsprechend mit zunehmender Diskretisierung numerisch immer schlechter konditioniert. Daher tritt auch bei einer numerischen Umsetzung, bei Verwendung einer doppelten Genauigkeit<sup>38</sup> für Gleitkommaberechnungen<sup>39</sup>, bereits bei einer Diskretisierung mit etwa 50 mathematischen Schichten ein beträchtlicher numerischer Fehler auf. Also kann auch keine Konvergenz der Ergebnisse mit zunehmender Diskretisierung erreicht werden.

Als grundlegendes Problem konnte die Berechnung der Eigenwerte und der zugehörigen Eigenvektoren identifiziert werden. Insbesondere die Nulleigenwerte und deren Hauptvektoren höherer Stufe sind für numerische Fehler sehr anfällig.

Ein wesentlich robusterer Ansatz zur Lösung von Systemen linearer gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten stellt die Verwendung der Matrixexponentialfunktion dar. Diese stellt die Erweiterung der Exponentialfunktion reeller Exponenten für den Fall quadratischer Matrizen dar.

Die Matrixexponentialfunktion ist wie folgt definiert:<sup>40</sup>

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i}{i!}. \quad (4.42)$$

Die Lösung einer Differentialgleichung der Form

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{y}(x) \quad \text{ist somit als} \quad \mathbf{y} = e^{\mathbf{A}x} \quad (4.43)$$

<sup>38</sup>Engl.: double precision, Rechengenauigkeit auf etwa 16 Stellen

<sup>39</sup>Wie es etwa bei MATLAB als Standardeinstellung der Fall ist.

<sup>40</sup>In gängigen numerischen Berechnungsprogrammen ist sie allerdings nicht in Form dieser Reihenentwicklung implementiert, da für diese Berechnung die Eigenwerte benötigt werden. In MATLAB wird im Matrixexponentialalgorithmus die Padé-Approximation verwendet.



direkt anzugeben. Somit kann die Lösung des Eigenwertproblems (4.33) auch direkt mit Hilfe der Matrixexponentialfunktion angegeben werden. Dann wird jedoch für alle Lösungsanteile direkt die gleiche unverschobene Koordinate  $x$  verwendet. In Folge dessen ist das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der freien Konstanten wieder schlecht konditioniert. Um also die Verschiebung der Koordinaten auch bei diesem Lösungsverfahren zu verwenden, ist eine Schurzerlegung der Systemmatrix  $\mathbf{M}$  nötig. Dabei ist die Schurzerlegung so zu wählen, dass die auf der Diagonalen stehenden Eigenwerte der Größe nach sortiert sind. Mit der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  ergibt sich die Zerlegung zu:

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{T}^\top \mathbf{M} \mathbf{T}. \quad (4.44)$$

Dabei muss die Transformationsmatrix numerisch berechnet werden. In Matlab muss hierzu die Funktion `schur` verwendet werden, um die Schurzerlegung zu bestimmen, anschließend müssen die Eigenwerte sortiert werden und mit der Funktion `bdschur` die entsprechende Block-Schurdiagonalisierung durchgeführt werden (siehe auch Song (2004), Jung u. Becker (2013)). Die Matrix  $\tilde{\mathbf{S}}$  hat dann Blockstruktur, wobei es drei Blöcke gibt: je einen für die positiven und negativen Eigenwerte sowie einen für die Nulleigenwerte:

$$\tilde{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}^+ & & \\ & \tilde{\mathbf{S}}^0 & \\ & & \tilde{\mathbf{S}}^- \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Mit dem Vektor  $\mathbf{C}$  der freien Konstanten mit Größe  $4(n+1)$  kann die Gesamtlösung wieder unter Verwendung der Matrixexponentialfunktion geschrieben werden :

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{T} e^{\tilde{\mathbf{S}} x} \mathbf{C} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} e^{\tilde{\mathbf{S}}^+ x} & & \\ & e^{\tilde{\mathbf{S}}^0 x} & \\ & & e^{\tilde{\mathbf{S}}^- x} \end{bmatrix} \mathbf{C}. \quad (4.46)$$

Hier ist es nun möglich die Verschiebung der Koordinaten für die einzelnen Lösungsanteile einzusetzen:

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} e^{\tilde{\mathbf{S}}^+ (x - \frac{L}{2})} & & \\ & e^{\tilde{\mathbf{S}}^0 x} & \\ & & e^{\tilde{\mathbf{S}}^- (x + \frac{L}{2})} \end{bmatrix} \mathbf{C}. \quad (4.47)$$

Somit ist eine robuste und effiziente Lösungsverfahren für das Differentialgleichungssystems (4.27) gegeben.

#### 4.4.1 Rand- und Übergangsbedingungen

Im Folgenden sollen die Rand- und Übergangsbedingungen für den vorliegenden Fall einer einschnittigen Klebverbindung dargelegt werden. Wie in Abbildung 4.1

dargestellt, wird die Verbindung in drei rechteckige Teilkörper zerlegt. Es wird eine einheitliche Zerlegung in Schichten gewählt: Die Fügeteile werden in  $n_F$  Schichten diskretisiert und die Klebschicht in  $n_K$  Schichten. Die Schichtanzahl der einzelnen Teilkörper ist dann

$$\begin{aligned} n_I &= n_F, \\ n_{II} &= n_K + 2n_F, \\ n_{III} &= n_F. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Für die Beschreibung der Deformation der einzelnen Teilkörper müssen jeweils  $4(n+1)$  Unbekannte identifiziert werden. Insgesamt ist die Anzahl  $U$  der Unbekannten dann jeweils:

$$U = 4(4n_F + n_K + 3). \tag{4.49}$$

**Randbedingungen** In beiden betrachteten Struktursituationen sind die Randbedingungen identisch. Am äußeren Ende des unteren Fügeteils werden alle Verschiebungen zu null gefordert, während am anderen Ende der Fügung  $u = u_0$  und  $v = 0$  gefordert werden. Dies stellt die typischen Randbedingungen einer eingespannten Überlappungsfügung dar. Dies sind insgesamt  $8(n_F + 1)$  Randbedingungen:

$$\text{Körper I bei } x = \frac{-L}{2} : \quad U_i = -u_0, \quad V_i = 0, \tag{4.50}$$

$$\text{Körper III bei } x = \frac{L}{2} : \quad U_i = V_i = 0. \tag{4.51}$$

**Übergangsbedingungen** Zwischen den Teilkörpern müssen in Längsrichtung an den Rändern Übergangsbedingungen formuliert werden. Neben kontinuierlichen Verschiebungen, also der Gleichheit von  $u_i$  und  $v_i$ , müssen die Normalspannungen in Längsrichtung und die Schubspannungen kontinuierlich sein. Dazu kann man die gewichteten schichtweise integrierten Spannungen (4.24, 4.25) verwenden, wie sie sich direkt als Randbedingungen aus dem Variationsproblem ergeben. Die Verwendung solcher Übergangsbedingungen hat jedoch bei der Programmierung der Berechnungsroutine stets zu numerischen Problemen geführt, die zu erheblichen Fehlern in den Ergebnissen (Verschiebungs- und Spannungsfelder) geführt hat. Die Übergangsbedingungen waren zwar wie gefordert im integralen Mittel erfüllt, es traten jedoch oszillierende Werte der Verschiebungen und Spannungen auf. Auch mit veränderter Programmierung und feinerer Diskretisierung konnte dieser numerische Fehler nicht vermieden werden. Abhilfe brachte eine Spannungsübergangsbedingung derart, dass die Spannungen aus den Verzerrungen an einem Interface mit den gemittelten Steifigkeiten der Schicht über und unter dem Interface berechnet werden. Diese gemittelten Spannungen werden auf beiden Rändern der angrenzenden Teilkörper gleichgesetzt, sowie auf den freien Rändern zu null gesetzt.

Die Spannungen auf dem Interface  $i$  lassen sich wie folgt angeben:

$$\sigma_{x_i} = \begin{cases} \frac{k_{11_i}}{2} + \frac{k_{12_{i-1}}(V_i(\frac{L}{2}) - V_{i-1}(\frac{L}{2}))}{2e_{i-1}} & \text{für } i = 1, \dots, n+1, \\ \frac{k_{11_{i-1}} + k_{11_i}}{2} + \frac{k_{12_{i-1}}(V_i(\frac{L}{2}) - V_{i-1}(\frac{L}{2}))}{2e_{i-1}} & \text{für } i = 2, \dots, n. \\ + \frac{k_{12_i}(V_{i+1}(\frac{L}{2}) - V_i(\frac{L}{2}))}{2e_{i+1}} \end{cases} \quad (4.52)$$

Zwischen allen Teilkörpern und an den freien Rändern lassen sich also insgesamt  $4(2n_F + n_K + 1)$  Übergangsbedingungen angeben. Zusammen mit den Randbedingungen erhält man damit direkt ausreichend Bedingungen zur Bestimmung der Unbekannten. Durch die Verwendung der Verschiebung der Koordinaten in der Lösung des Differentialgleichungssystems ist das resultierende lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der freien Konstanten numerisch gut konditioniert und kann mit sehr geringem numerischen Fehler gelöst werden.

#### 4.4.2 Berechnung der inneren Energie

Zur Berechnung der elastisch gespeicherten Formänderungsenergie (der inneren Energie) gibt es zwei grundlegende Ansätze: Zum einen die Integration der Formänderungsenergiegedichte über das gesamte Volumen, zum anderen die Ermittlung der Arbeit der äußeren Kräfte. Die innere Energie ergibt sich mit Gleichung (4.32) aus der Integration der Formänderungsenergiegedichtefunktion (4.14) über die Länge aller Teilkörper:

$$\Pi_i = \int_{\text{Alle Teilkörper}} P \, dx \quad (4.53)$$

$$= \int_{\text{Alle Teilkörper}} \boldsymbol{\psi}^\top \mathbf{S} \boldsymbol{\psi} \, dx. \quad (4.54)$$

Dieses Integral kann jedoch nicht analytisch gelöst werden, da für die Bestimmung des Integrals der Lösung mittels Matrixexponentialfunktion die Inverse der Systemmatrix berechnet werden muss. Diese ist jedoch singulär. Aufgrund der Nulleigenwerte höherer Ordnung ist auch die Verwendung einer Pseudoinversen nicht möglich um diese Berechnung durchzuführen. Ergo muss die Integration numerisch erfolgen, zum Beispiel mit der Trapez- oder Simpsonregel. Für jeden einzelnen Stützpunkt dieser Integration muss die Lösung nach Gleichung (4.46) durch Auswertung der Matrixexponentialfunktion bestimmt werden. Um eine ausreichend genaue Approximation des Integrals zu erreichen, müssen mindestens 200 Stützstellen verwendet werden. Diese sind zweckmäßigerweise so zu legen, dass im Bereich großer Gradienten der Deformationen und Spannungen, wie etwa am Ende des Überlappungsbereichs, mehr Stützpunkte liegen als in Bereichen mit geringen Gradienten.

Der zweite Weg ergibt sich aus dem Arbeitssatz. Die Arbeit der äußeren Kräfte muss der inneren Energie entsprechen:

$$W_a = \Pi_i. \quad (4.55)$$

Die äußere Arbeit ergibt sich aus dem Produkt der vorgegebenen Verschiebung  $u_0$  und der entsprechenden Reaktionskraft:

$$W_a = \frac{1}{2} u_o F_R. \quad (4.56)$$

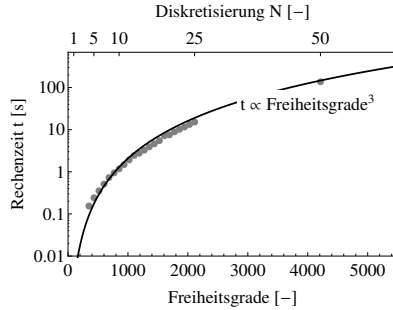
Die Reaktionskraft  $F_R$  muss der Normalkraft in den Füge­teilen entsprechen und kann durch Integration der Normalspannung  $\sigma_{xx}$  über die Dicke des Füge­teils außerhalb des Überlappungsbereichs berechnet werden:

$$F_R = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} \, dy. \quad (4.57)$$

Hierzu muss nur eine Auswertung der Matrixexponentialfunktion erfolgen. Daher ist dieser Weg wesentlich effizienter und wird im Folgenden verwendet, um die elastisch gespeicherte Formänderungsenergie der Fügung zu berechnen.

## 4.5 Numerische Umsetzung

Das beschriebene semi-analytische Berechnungsverfahren wurde in MATLAB umgesetzt. Dabei wurde unter Verwendung der Ergebnisse der Masterarbeit von Schumacher (2013) eine modulare Umsetzung mit neun Unterfunktionen gewählt, um eine effiziente Berechnung zu ermöglichen. Die numerische Berechnung erfolgt mit Gleitkommazahlen mit doppelter Genauigkeit. Der größte Rechenaufwand entsteht bei den notwendigen Schurzerlegungen, der Lösung des linearen Gleichungssystems der freien Konstanten, Matrixmultiplikationen und bei den Auswertungen der Matrixexponentialfunktion zur Erzeugung des linearen Gleichungssystems der freien Konstanten. Alle diese Rechenoperationen haben einen kubischen theoretischen Rechenaufwand  $\mathcal{O}(N^3)$  (Strang, 2003, Moler u. Van Loan, 2003) und ihre Implementierung in MATLAB erlaubt eine Parallelisierung auf mehreren Kernen eines Prozessors. Die Rechenzeit, die für die Lösung des Variationsproblems benötigt wird, steigt mit zunehmend feinerer Diskretisierung stark an. Auswertungen der vorliegenden Implementierung in MATLAB zeigen, dass die Rechenzeit  $t$  kubisch mit der Anzahl der Freiheitsgrade  $N$  zusammenhängt (siehe Tabelle 4.1). Abbildung 4.4 zeigt die Rechenzeit in Abhängigkeit der Freiheitsgrade des semi-analytischen Berechnungsverfahrens. In der Berechnung der Ergebnisse erfolgt eine Auswertung der Matrixexponentialfunktion an den jeweiligen  $x$ -Koordinaten. Die angegebenen Werte der Rechenzeit gelten für eine Berechnung der inneren Energie. Hierzu muss die Matrixexponentialfunktion lediglich einmal ausgewertet werden. Wenn



**Abbildung 4.4:** Rechenzeit des semi-analytischen Berechnungsverfahrens in Abhängigkeit der Diskretisierung.

Diskretisierung N	1	2	5	10	25	50
Freiheitsgrade	96	180	432	852	2112	4212
Rechenzeit [s]	0,02	0,05	0,24	1,18	15,2	137

**Tabelle 4.1:** Typische Rechenzeiten für eine Konfiguration mit einer Fügeteildicke  $h = 2$  mm und Klebschichtdicke  $t = 0,4$  mm. Die Angaben beziehen sich auf Berechnungen auf einem Rechner mit einem Quad-Core AMD Opteron™ Prozessor mit acht Kernen.

Deformations-, Dehnungs- oder Spannungsergebnisse betrachtet werden, muss für jede  $x$ -Koordinate eine weitere Auswertung der Matrixexponentialfunktion erfolgen. Bei fein gerasterten Plots kann diese, wie auch bei der Auswertung eines fein diskretisierten Finite-Elemente-Modell, schnell den Hauptaufwand darstellen.

## 4.6 Ergebnisse

Im Folgenden werden die Ergebnisse des beschriebenen semi-analytischen Berechnungsmodells für verschiedene Konfigurationen von einschnittigen Überlappungsfügungen dargestellt. In vorbereitenden Untersuchungen hat sich gezeigt, dass die numerische Kondition und die Genauigkeit der Ergebnisse vom Verhältnis der Dicke der Diskretisierungsschichten in den Fügeteilen und der Klebschicht abhängt. Numerisch am günstigsten ist es, wenn alle Schichten gleich dick sind. Daher ergibt sich aus dem Verhältnis der Klebschichtdicke zur Fügeteildicke das Verhältnis der Schichtanzahl. Die Anzahl der Schichten in der Klebschicht wird mit  $N$  bezeichnet

	Elastizitätsmodul $E$ [GPa]	Querkontraktionszahl $\nu$ [-]
Stahl	210,00	0,30
Aluminium	70,00	0,33
Epoxy	4,44	0,35

**Tabelle 4.2:** Materialkennwerte der in der Auswertung verwendeten Materialien für Fügeiteile und Klebschicht.

und die Anzahl der Schichten in den Fügeiteilen  $N_F$  ist dann

$$N_F = \left\lceil \frac{h}{t} N \right\rceil. \quad (4.58)$$

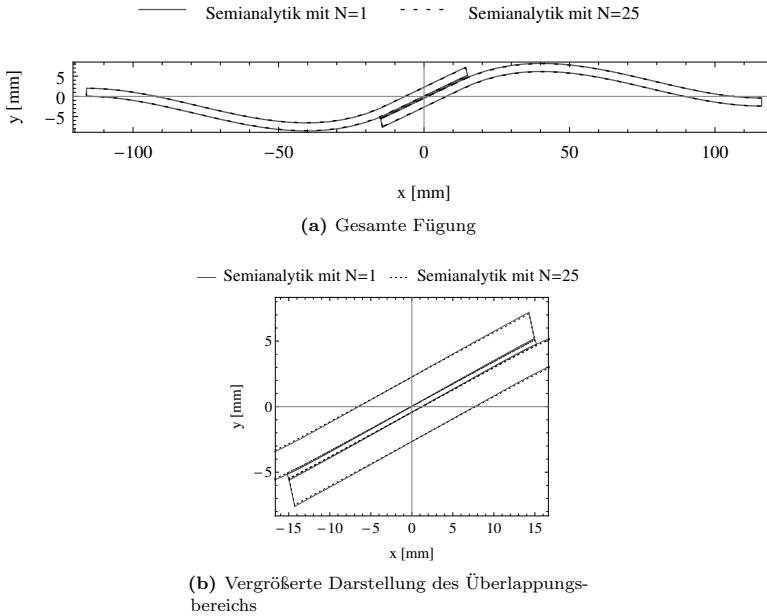
Es werden Ergebnisse für willkürlich gewählte Klebverbindungskonfigurationen gezeigt und diskutiert, deren Eigenschaften allgemein gelten. Bei allen Konfigurationen wird – soweit nicht anders angegeben – die Randverschiebung  $u_0 = 2$  mm gewählt. Es werden im Folgenden die in Tabelle 4.2 angegebenen Werte der elastischen Kenngrößen der Fügeiteile und der Klebschicht verwendet.

#### 4.6.1 Konvergenz der Ergebnisse

In diesem Abschnitt wird der Einfluss der Diskretisierung  $N$  der Klebschicht und dementsprechend der Fügeiteile auf die Ergebnisse untersucht.

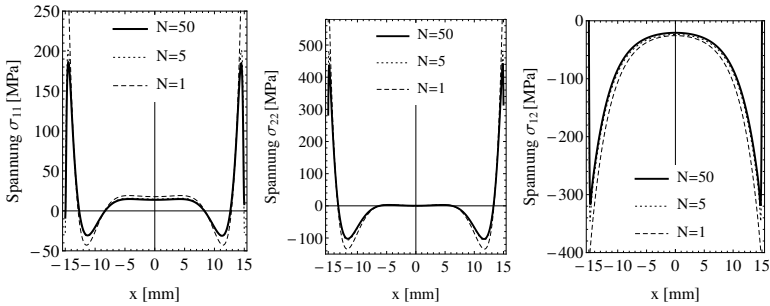
Die Abbildung 4.5 zeigt die Gesamtdeformation der belasteten Klebverbindung. Abbildung 4.5(b) zeigt den Ausschnitt des Überlappungsbereichs in vergrößerter Darstellung. Man sieht aufgrund des gewählten Maßstabes der Ordinate deutlich die S-förmige Deformation der Fügeiteile. In den Abbildungen sind jeweils die Ergebnisse des vorliegenden semi-analytischen Berechnungsverfahrens mit zwei unterschiedlichen Diskretisierungen dargestellt. Die Ergebnisse der Berechnung mit einer Diskretisierungsschicht in der Klebschicht können nur in der vergrößerten Darstellung von den Ergebnissen der Berechnung mit 25 Diskretisierungsschichten in der Klebschicht unterschieden werden. Auch bei feineren Diskretisierungen gibt es keine weiteren Abweichungen. Die Ergebnisse für die Verschiebungen konvergieren und zeigen auch bei sehr grober Diskretisierung bereits eine sehr gute Genauigkeit.

Im Folgenden soll die Konvergenz der Spannungsergebnisse untersucht werden. Da die Spannungen mit der Ableitung der Verschiebungen zusammenhängen sind diese wesentlich empfindlicher gegenüber Abweichungen. Abbildung 4.6 zeigt die Ergebnisse mit drei unterschiedlichen Diskretisierungen für eine Fügungskonfiguration mit einer Überlappungslänge von 30 mm. Da sich die Ergebnisse mit einer Diskretisierung von  $N > 50$  kaum noch ändern stellen die Ergebnisse mit  $N = 50$  hier die voll auskonvergierte Lösung dar. Man erkennt, dass die Spannungen in

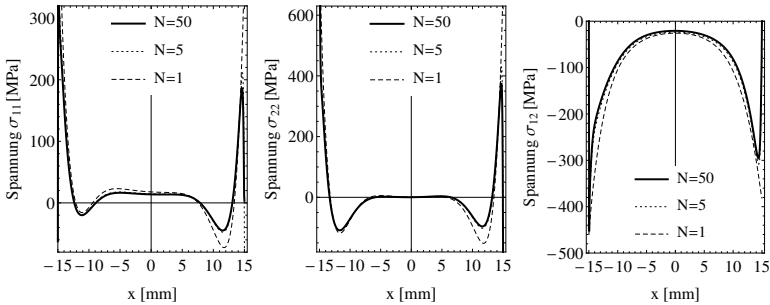


**Abbildung 4.5:** Deformation einer einschnittigen Klebverbindung. Berechnung mit der vorliegenden semi-analytischen Methode. Dargestellt sind die Ergebnisse für Diskretisierungen in Dickenrichtung mit einer sowie 25 Schichten in der Klebschicht. (Konfiguration:  $L = 30$  mm;  $h = 2$  mm;  $t = 0,4$  mm; Material: Stahl-Epoxy-Stahl)

der Mittelebene der Klebschicht bei  $N = 1$  bereits qualitativ richtig abgebildet sind. Die Normalspannung in Längsrichtung und die Schubspannungen fallen am freien Rand bei  $L = \pm 15$  mm auf null ab. Wenn fünf Schichten in der Klebschicht und dementsprechend (nach Gleichung (4.58)) bei dieser Konfiguration dann 25 Schichten in den Fügeteilen verwendet werden, ergibt sich eine Spannungslösung, die von der auskonvergierten Lösung kaum mehr zu unterscheiden ist. Ein ähnliches Bild ergibt sich bei der Betrachtung der Spannungen in der Klebschicht in direkter Nähe zum Interface von Klebschicht und Fügeteil. Man beachte, dass sich hier eine asymmetrische Spannungsverteilung ergibt. Die Ergebnisse für  $N = 1$  sind bereits eine sehr gute Näherung der gesamten Spannungsverteilung und die Ergebnisse für  $N = 5$  sind wieder kaum mehr von der auskonvergierten Lösung zu unterscheiden.



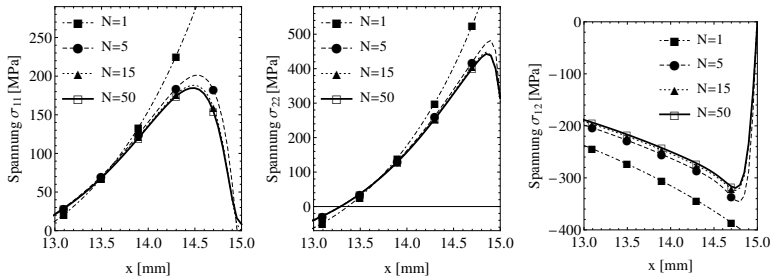
**Abbildung 4.6:** Auswertung der Spannungen in der Mittelebene der Klebschicht für unterschiedliche Diskretisierungen der Klebschicht. (Konfiguration:  $L=30$  mm;  $h=2$  mm;  $t=0,4$  mm; Material: Stahl-Epoxy-Stahl)



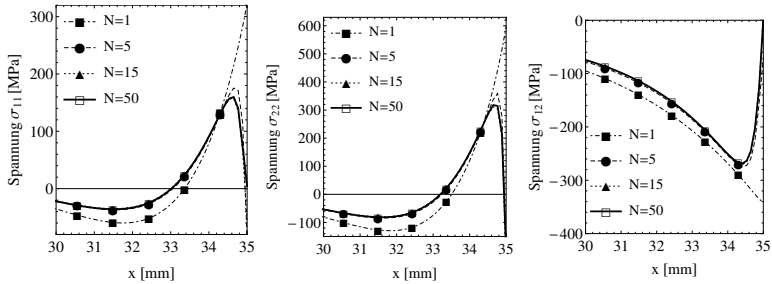
**Abbildung 4.7:** Auswertung der Spannungen in der Klebschicht in direkter Nähe zum Interface von Klebschicht und Füge teil für unterschiedliche Diskretisierungen der Klebschicht. (Konfiguration:  $L=30$  mm;  $h=2$  mm;  $t=0,4$  mm; Material: Stahl-Epoxy-Stahl)

Ein differenziertes Bild ergibt sich bei der Betrachtung des Endes des Überlappungsbereichs, da sich dort starke Gradienten der Spannungen und dementsprechend größere Abweichungen der unterschiedlichen Diskretisierungen einstellen. In Abbildung 4.8 ist der rechte Rand des Überlappungsbereichs aus Abbildung 4.6 vergrößert dargestellt. Alle gezeigten Diskretisierungen zeigen bis auf den letzten Millimeter des Überlappungsbereichs eine sehr gute Übereinstimmung. Man sieht, dass ab fünf Diskretisierungsschichten in der Klebschicht die Normalspannung in Längsrichtung und die Schubspannung die Bedingung eines spannungsfreien Randes korrekt abbilden. Indes die Ergebnisse mit fünf Schichten noch deutlich



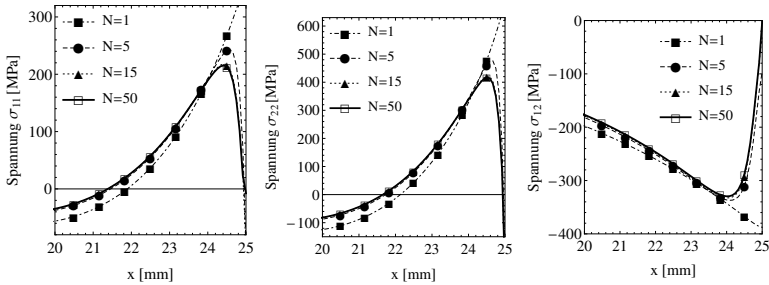


**Abbildung 4.8:** Auswertung der Spannungen in der Mittelebene der Klebschicht für unterschiedliche Diskretisierungen der Klebschicht. Vergrößerter Ausschnitt aus Abbildung 4.6. (Konfiguration:  $L = 30$  mm;  $h = 2$  mm;  $t = 0,4$  mm; Material: Stahl-Epoxy-Stahl)



**Abbildung 4.9:** Auswertung der Spannungen in der Klebschicht in direkter Nähe zum Interface von Klebschicht und Fügeitel für unterschiedliche Diskretisierungen der Klebschicht. (Konfiguration:  $L = 70$  mm;  $h = 2$  mm;  $t = 0,4$  mm; Material: Stahl-Epoxy-Stahl)

von der auskonvergierten Lösung mit 50 Schichten abweichen, ist die Lösung mit 15 Schichten nahezu identisch mit der vollständig auskonvergierten Lösung. Bei der Betrachtung der Spannungen nahe des Interface von Klebschicht und Fügeitel in Abbildung 4.9 ergibt sich das gleiche Bild. Auch hier sind die Ergebnisse bei einer Diskretisierung mit 15 Schichten wieder nahezu identisch mit denen der sehr fein diskretisierten Lösung  $N = 50$ . Dieses Konvergenzverhalten zeigt sich nicht nur für die diskutierte Klebverbindungskonfiguration, sondern ist allgemein bei allen untersuchten Klebverbindungskonfigurationen zu beobachten. Abbildung 4.10 zeigt zum Beispiel für eine Klebverbindungskonfiguration mit längerer Überlappungslänge und dickeren Fügeiteln das gleiche Konvergenzverhalten des vorliegenden



**Abbildung 4.10:** Konvergenz der Spannungsergebnisse. (Konfiguration:  $L = 50$  mm;  $h = 4$  mm;  $t = 0,6$  mm; Material: Stahl-Epoxy-Stahl)

semi-analytischen Berechnungsverfahren.

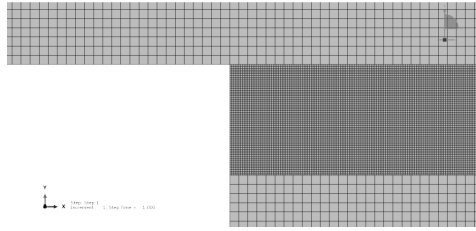
Die Ergebnisse des semi-analytischen Berechnungsverfahrens zeigen ein eindeutiges Konvergenzverhalten derart, dass mit zunehmender Diskretisierungsfeinheit eine immer geringere Abweichung der Ergebnisse erreicht wird: Die Ergebnisse konvergieren. Entscheidend für eine stabile und konvergente numerische Umsetzung ist die Verwendung der Matrixexponentialfunktion. Vorausgehende Untersuchungen haben gezeigt, dass bei einer Umsetzung der Lösung mit Eigenwertanalyse keine konvergente Lösung erzielt werden kann. Dies wurde auch bei der Anwendung dieser Methodik auf andere strukturelle Situationen bereits beobachtet (Mittelstedt, 2006).

#### 4.6.2 Vergleich mit Finite-Elemente-Analysen

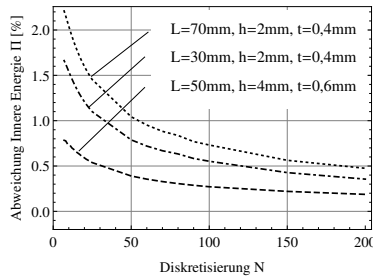
In diesem Abschnitt sollen die Ergebnisse des semi-analytischen Berechnungsverfahrens mit den Ergebnissen einer Finite-Elemente-Analyse verglichen werden. Dazu wird eine parametrische Umsetzung eines Finite-Elemente-Modells in ABAQUS 6.12-1 mittels der Python-Schnittstelle genutzt. Über diese ist es möglich, sämtliche Modellierungs- und Auswertungsschritte mit speziellen von ABAQUS bereitgestellten Python-Befehlen durchzuführen. Der Aufbau des Finite-Elemente-Modells ist folgendermaßen: Die Fügeiteile und die Klebschicht werden als einzelne Körper erzeugt und mit einem gleichmäßigen, rechteckigen Netz versehen. In den Fügeiteilen werden quadratische Elemente mit einer durchschnittlichen Elementgröße von 0,05 mm und in der Klebschicht mit 0,01 mm vorgesehen. Es werden jeweils zweidimensionale Kontinuums-elemente mit vier Knoten und Bedingungen des ebenen Verzerrungszustandes verwendet<sup>41</sup>. In der Baugruppe werden diese Teilkörper mit einer Zwangsbedingung<sup>42</sup> verbunden. Damit ist es möglich ungleiche, regelmäßige

<sup>41</sup>In ABAQUS der Elementtyp CPE4

<sup>42</sup>In ABAQUS: Tie-constraint



**Abbildung 4.11:** Ausschnitt der Vernetzung, wie sie in den Finite-Elemente-Vergleichsrechnungen verwendet wurde.

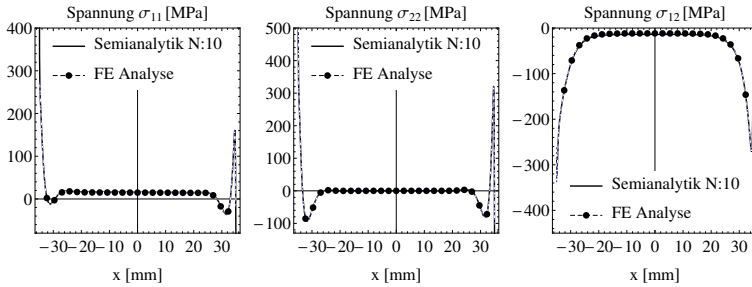


**Abbildung 4.12:** Prozentuale Abweichung der inneren Energie aus der semi-analytischen Berechnung zur Finite-Elemente-Analyse für drei unterschiedliche Stahl-Epoxy-Fügungen.

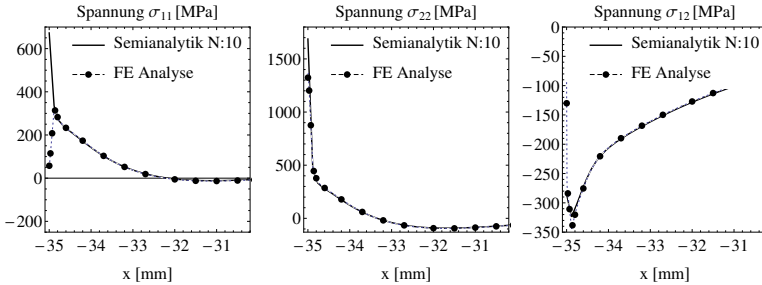
Netze in beiden Körpern zu verwenden. Abbildung 4.11 zeigt einen Ausschnitt der verwendeten Vernetzung. Wie im semi-analytischen Berechnungsverfahren werden linear-elastisches Materialverhalten und die entsprechenden Verschiebungsrandbedingungen vorgesehen. Insgesamt haben die Modelle zwischen  $0,4 \cdot 10^6$  und  $1,6 \cdot 10^6$  Freiheitsgrade. Diese Rechnungen haben Rechenzeiten inklusive Auswertung zwischen 50 s und 130 s.<sup>43</sup>

Eine gut geeignete Größe, um die Qualität der Lösung zu beschreiben, ist die innere Energie der Verbindung. In Abbildung 4.12 ist die Abweichung des Ergebnisses der inneren Energie des semi-analytischen Berechnungsverfahrens zum Ergebnis der inneren Energie der Finite-Elemente-Analyse für drei verschiedene Klebverbindungskonfigurationen dargestellt. Man erkennt, dass die Abweichung mit zunehmendem Diskretisierungsgrad immer geringer wird. Ab etwa zehn Diskretisierungsschichten in der Klebschicht liegt die Abweichung stets unter zwei Prozent, bei über 50 Diskretisierungsschichten für alle betrachteten Konfigurationen unter

<sup>43</sup>Wie auch bei der Auswertung des semi-analytischen Berechnungsverfahrens wurde ein Rechner mit einem Quad-Core AMD Opteron™ Prozessor mit acht Kernen eingesetzt.



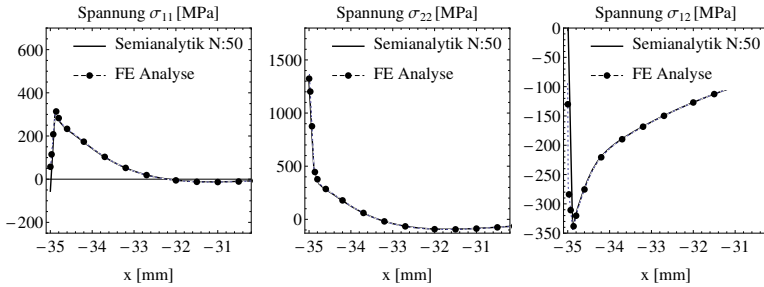
**Abbildung 4.13:** Vergleich der Spannungsergebnisse des semi-analytischen Berechnungsverfahrens mit der Finite-Elemente-Referenzlösung. Dargestellt sind die Spannungen entlang der Überlappungslänge in direkter Nähe des Fügeiteil-Klebschicht-Interfaces. (Konfiguration:  $L = 70$  mm;  $h = 2$  mm;  $t = 0,4$  mm; Material: Stahl-Epoxy-Stahl)



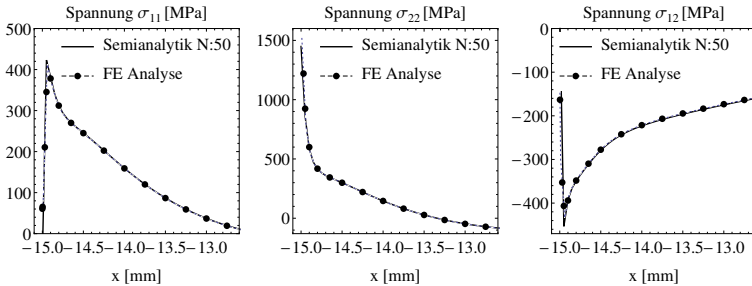
**Abbildung 4.14:** Vergleich der Spannungsergebnisse des semi-analytischen Berechnungsverfahrens mit der Finite-Elemente-Referenzlösung. Dargestellt sind die Spannungen entlang der Überlappungslänge in direkter Nähe des Fügeiteil-Klebschicht-Interfaces. (Konfiguration:  $L = 70$  mm;  $h = 2$  mm;  $t = 0,4$  mm; Material: Stahl-Epoxy-Stahl)

einem Prozent.

Im Weiteren wird die Abweichung der Spannungsergebnisse von der Finite-Elemente-Referenzlösung betrachtet. Abbildung 4.13 zeigt die Spannungsergebnisse der semi-analytischen Berechnung im Vergleich zur Finite-Elemente-Analyse für eine Klebverbindungskonfiguration mit einer Überlappungslänge von 70 mm. Die Ergebnisse der semi-analytischen Analyse liegen bei der Betrachtung der gesamten Überlappungslänge vollständig auf den Ergebnissen der Finite-Elemente-Referenz-



**Abbildung 4.15:** Vergleich der Spannungsergebnisse des semi-analytischen Berechnungsverfahrens mit der Finite-Elemente-Referenzlösung. Dargestellt sind die Spannungen entlang der Überlappungslänge in direkter Nähe des Füge-teil-Klebschicht-Interfaces. (Konfiguration:  $L = 70$  mm;  $h = 2$  mm;  $t = 0,4$  mm; Material: Stahl-Epoxy-Stahl)



**Abbildung 4.16:** Vergleich der Spannungsergebnisse des semi-analytischen Berechnungsverfahrens mit der Finite-Elemente-Referenzlösung. Dargestellt sind die Spannungen entlang der Überlappungslänge in direkter Nähe des Füge-teil-Klebschicht-Interfaces. (Konfiguration:  $L = 30$  mm;  $h = 2$  mm;  $t = 0,4$  mm; Material: Stahl-Epoxy-Stahl)

lösung. Betrachtet man einen vergrößerten Bereich am Ende der Überlappungslänge (Abbildung 4.14), stellt man fest, dass die semi-analytische Lösung kleine Abweichungen gegenüber der Finite-Elemente-Referenzlösung zeigt. Die Bedingung spannungsfreier Seitenflächen der Klebschicht ist nicht gut erfüllt. Erhöht man die Diskretisierung auf zum Beispiel  $N = 50$ , ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung (siehe Abbildung 4.15). Auch die Normalspannung  $\sigma_{22}$  in Dickenrichtung, die stark von der nahen Spannungssingularität an der einspringenden Ecke von Füge-teil

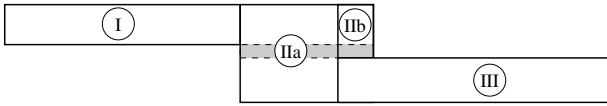
und Klebschicht beeinflusst wird, wird gut abgebildet. Weitergehende Rechnungen zeigen, dass diese Feststellungen allgemein für typische Klebverbindungskonfigurationen gelten. Als Beispiel sei an dieser Stelle der Vergleich des semi-analytischen Berechnungsverfahrens mit der Finite-Elemente-Referenzlösung für eine Klebverbindungskonfiguration mit einer Überlappungslänge von  $L = 30$  mm angeführt, das wie zuvor eine sehr gute Übereinstimmung zeigt (Vgl. Abbildung 4.16).

Insgesamt zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung des vorliegenden semi-analytischen Berechnungsverfahrens mit der Referenzlösung. Das vorgestellte Verfahren ist also ein geeignetes Verfahren zur Lösung des vorliegenden elastizitätstheoretischen Problems.

## 4.7 Anmerkungen und Ausblick

### 4.7.1 Analyse einer angerissenen Klebverbindung

Es wurde der Versuch unternommen, die aufgezeigte Vorgehensweise auch auf den Fall einer angerissenen Klebverbindung zu erweitern. Wie bei der ungerissenen Struktur ist es möglich, diese aus mehreren rechteckigen Teilkörpern aufzubauen. Betrachtet man einen Riss im Interface von Klebschicht und Füge teil, ausgehend von einer einspringenden Ecke, muss ein weiterer Teilkörper eingefügt werden um den Riss abzubilden, siehe dazu Abbildung 4.17. Diese Aufteilung ist möglich, führt jedoch zu mehreren Problemen. Zum einen ist das Variationsproblem im neuen Teilkörper (IIb) schlecht konditioniert, wenn kurze Risse betrachtet werden. Dann kann die Breite einer Diskretisierungsschicht in der Größenordnung von deren Dicke sein. Dies führt anschaulich gesehen dazu, dass die auf- und abklingenden Terme der Lösung in direkter Interaktion stehen und aufgrund der Größenordnung der auftretenden Terme numerische Probleme auftreten. Das zweite Problem entsteht bei der Definition der Übergangsbedingungen zwischen dem Teilkörper des verbliebenen Bereichs der ungerissenen Klebschicht und dem Teilkörper des unteren Füge teils sowie dem Teilkörper über dem Riss. Die elastizitätstheoretisch auftretende Spannungsingularität wird dabei durch im Mittel zu erfüllende Spannungsrandbedingungen erfasst (siehe Gleichung (4.24, 4.25)). Es konnten keine Bedingungen formuliert werden, die korrekte Spannungsübergangsbedingungen darstellen. So ergeben sich etwa für die Schnittkräfte im oberen Füge teil andere Werte als für die des unteren Füge teils. Ein Vergleich mit einer Finite-Elemente-Referenzlösung zeigte für typische Klebverbindungskonfigurationen Abweichungen größer fünf Prozent. Für eine etwaige Verwendung des vorliegenden Berechnungsverfahrens für eine Umsetzung eines gekoppelten Spannungs-Energie-Kriteriums muss jedoch die Energie sehr genau berechnet werden, da die Energiedifferenz zwischen gerissener und ungerissener Struktur betrachtet wird. Typischerweise liegt das Verhältnis der Energiedifferenz zur inneren Energie des Ausgangspunkts in der Größenordnung von  $10^{-4}$  und ist damit deutlich kleiner als der auftretende Fehler. Dies verhindert also eine Verwendung des semi-analytischen Berechnungsverfahrens



**Abbildung 4.17:** Mögliche Aufteilung in rechteckige Teilkörper bei der Betrachtung einer einschnittigen Überlappungsfügung mit Riss in der Grenzschicht.

in der vorliegenden Form für die Auswertung von gekoppelten Spannungs-Energie-Kriterien.

#### 4.7.2 Quadratische Ansatzfunktionen

Wie zuvor beschrieben werden lineare Ansatzfunktionen verwendet. Ergo ist das resultierende Verschiebungsfeld in Dickenrichtung  $C_0$ -stetig und die Ergebnisse der Spannungsauswertung zeigen nicht-kontinuierliche Spannungen in Dickenrichtung. Dieser für viele numerische Approximationsverfahren typische Fehler kann durch eine feinere Diskretisierung ausgeglichen werden. Daher spielt dieser in der praktischen Auswertung meist keine große Rolle. Es ist allerdings auch denkbar,  $C_1$ -stetige, quadratische Ansatzfunktionen zu verwenden. Dazu muss zum Beispiel in der Mitte der Klebschicht eine weitere Verschiebungsfunktion eingeführt werden. Dann ist auch die Ableitung des Verschiebungsfelds in Dickenrichtung stetig und somit sind es auch die Spannungen. Vorbereitende Untersuchungen haben allerdings gezeigt, dass damit die numerische Komplexität des Problems stark zunimmt. In Anbetracht der hohen Güte der Ergebnisse des semi-analytischen Berechnungsverfahrens wurde auf eine Implementierung von quadratischen Ansatzfunktionen verzichtet. Es besteht jedoch Grund zur Annahme, dass die Spannungsübergangsbedingungen im Falle der gerissenen Struktur vorteilhafter formuliert werden können und das Problem der ungleichen Schnittkräfte verbessert werden kann.

#### 4.7.3 Erweiterung auf andere strukturelle Situationen

In der vorliegenden Form wurde das semi-analytische Verfahren zur Untersuchung von einschnittigen Überlappungsfügungen genutzt. Es ist jedoch sehr leicht möglich, dieses Berechnungsverfahren auch auf andere strukturelle Situationen zu übertragen. Voraussetzung ist jedoch, dass die strukturelle Situation in rechteckige Teilkörper aufgeteilt werden kann und diese deutlich länger als hoch sind. Auch ist eine Belastung in der Ebene Voraussetzung für die Anwendbarkeit des zweidimensionalen Modells. Eine Anwendung des vorliegenden semi-analytischen Berechnungsverfahrens auf Stokfügungen oder auf zweischnittige Überlappungsfügungen ist ebenso einfach umsetzbar wie auch die Analyse von einschnittigen Klebverbindungen mit beliebiger (ebener) Belastung.

#### **4.7.4 Strukturoptimierungen**

Das vorgestellte Berechnungsverfahren zeichnet sich besonders durch eine hohe Effizienz aus. Damit empfiehlt es sich für die Verwendung in Strukturoptimierungen. So ist es zum Beispiel von Interesse eine Klebverbindung dahingehend zu untersuchen, welche Klebverbindungskonfiguration eine vorgegebene Zielfunktion am besten erfüllt. Denkbare Zielfunktionen sind dabei maximale oder minimale Nachgiebigkeit der Verbindung, die Minimierung von Spannungen in bestimmten Bereichen oder eine Optimierung bezüglich des Materialverbrauchs bzw. Gewichts. Die erforderlichen Parametervariationen müssen dabei entsprechende Restriktionen, wie etwa Bauraumrestriktionen, einhalten. Da in solchen Strukturoptimierungen eine Vielzahl von Strukturanalysen benötigt werden, sind effiziente Berechnungsverfahren von besonderer Bedeutung.



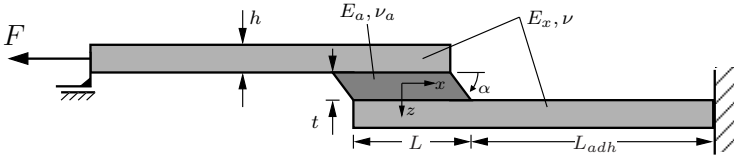
## Kapitel 5

### Analyse von Rissinitiierung in Klebverbindungen mittels numerischem Modell

*An der starken, hier sogar singulären, Spannungskonzentration zwischen Klebschicht und Füge­teil treten üblichweise bei Überlastung von spröden Klebverbindungen Risse auf, die dann zum vollständigen Versagen führen. Die Initiierung dieser Risse soll in diesem Kapitel mit dem gekoppelten Spannungs-Energie-Kriterium im Rahmen der Finiten Bruchmechanik untersucht werden. Für dessen Auswertung müssen die Spannungen sowie die zu den betrachteten Risskonfigurationen gehörenden Energiefreisetzungs­raten berechnet werden. In diesem Kapitel wird dazu eine Finite-Elemente-Routine benutzt. Der Aufbau und die Umsetzung dieser Finite-Elemente-Routine sowie die Lösung des Optimierungsproblems des gekoppelten Kriteriums werden ausgeführt und diskutiert. Dabei wird der Effekt der nicht-monotonen Energiefreisetzungsrate auf die Lösung des Optimierungsproblems und die Stabilität der initiierten finiten Risse umfassend beschrieben. Die Ergebnisse der Analyse werden im Detail dargestellt und mit Experimenten verglichen. Dabei zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung mit experimentellen Befunden unter ausschließlicher Nutzung physikalischer Versagensparameter. Das Kapitel schließt mit einer Untersuchung des Einflusses verschiedener Parameter auf die Versagenslast der betrachteten Klebverbindung. Die hier vorgestellten Ergebnisse wurden in internationalen, begutachteten Fachzeitschriften veröffentlicht (Hell et al., 2014, Weißgraeber et al., 2014a).*

#### 5.1 Einführung

Wie in Kapitel 3.2 beschrieben, erfolgt das Versagen von spröden Klebverbindungen typischerweise durch Entstehung eines Risses der Klebschicht. In diesem Kapitel soll nun eine Analyse der ursächlichen Rissinitiierung erfolgen. An den einspringenden Ecken von Klebverbindungen treten, wie zuvor in Kapitel 2.3 beschrieben, im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie Spannungssingularitäten auf. Diese sind jedoch schwache Spannungssingularitäten und können nicht mit Methoden der klassischen Bruchmechanik bewertet werden (vgl. Ausführung in Kapitel 2.4). Das gekoppelte Spannungs-Energie-Kriterium im Rahmen der Finiten Bruchmechanik soll nun genutzt werden, um die Initiierung von Rissen an eben diesen Punkten



**Abbildung 5.1:** Untersuchte Struktursituation einer einschnittigen Überlappungsfügung mit Klebfugenwinkel.

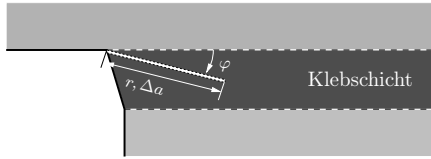
zu untersuchen. Betrachtet wird die sehr praxisrelevante einschnittige Überlappungsfügung, die auch häufig experimentell untersucht wird. Teile dieser Analyse wurden in der vom Autor betreuten Masterarbeit von Hell (2011) erarbeitet und gemeinsam veröffentlicht (Hell et al., 2014).

## 5.2 Aufbau der Finite-Elemente-Routine

Für die Umsetzung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums muss neben der Spannungsverteilung im Bereich der einspringenden Ecke auch die Energiefreisetzungsrate der betrachteten Risskonfigurationen ermittelt werden. Die dazu verwendete Finite-Elemente-Routine wird im Folgenden dargestellt. Sie unterscheidet sich vom im vorangegangenen Kapitel eingesetzten Finite-Elemente-Modell durch die lokale Netzverfeinerung an einer einspringenden Ecke und die Möglichkeit radiale Risse abzubilden.

Es erfolgt eine zweidimensionale Betrachtung einer symmetrischen, einschnittigen Überlappungsfügung mit Tiefe  $b$ . Die Überlappungslänge sei als  $L$  bezeichnet und die nicht verklebte Fügeiteillänge als  $L_{adh}$ . Die Dicke der Klebschicht sei  $t$  und die Dicke der Fügeiteile  $h$ . Der Winkel der Klebschicht am Ende des Überlappungsbereichs wird mit  $\alpha$  bezeichnet. Es wird linear-elastisches Materialverhalten für die Fügeiteile und Klebschicht angenommen. Fügeiteile und Klebschicht sind homogen und isotrop. Die jeweiligen Elastizitätsmoduln und Querkontraktionszahlen von Fügeiteil und Klebschicht sind  $E_x$  und  $\nu$  bzw.  $E_a$  und  $\nu_a$ . Es wird eine axiale Zugbelastung der Fügung untersucht und es wird eine Verschiebungsrandbedingung derart vorgesehen, dass der rechte Rand des unteren Fügeiteils vollständig eingespannt ist ( $u = v = 0$ ) und am linken Rand des oberen Fügeiteils nur die Vertikalverschiebung gesperert ist ( $v = 0$ ). An dieser Stelle greift entweder die äußere axiale Last  $F$  an oder es erfolgt eine Vorgabe der Verschiebung ( $u = u_0$ ). Eine Darstellung der untersuchten Geometrie und der eingeführten Größen findet sich in Abbildung 5.1.

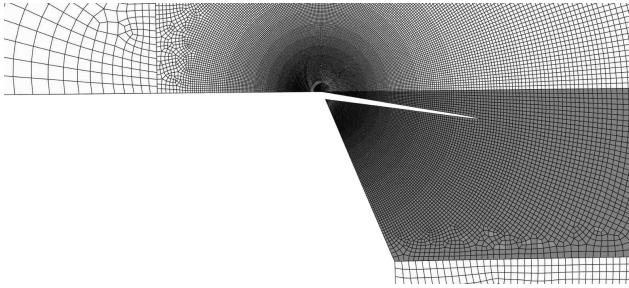
Für die Auswertung des gekoppelten Kriteriums wird zum einen die Spannungsverteilung im ungerissenen Zustand sowie die Energiefreisetzungsrate der betrachteten Risskonfigurationen ermittelt. Für die Berechnung des Spannungszustandes des



**Abbildung 5.2:** Modellierung der Rissinitiiierung. Es werden Risse in der Klebschicht ausgehend von einer einspringenden Ecke von Fügebauteil und Klebschicht betrachtet. Die Risskonfiguration ist bestimmt durch die Länge  $\Delta a$  des Risses sowie dem Risswinkel  $\varphi$ .

ungerissenen Zustandes genügt eine Finite-Elemente-Analyse, wohingegen für die Berechnung der Energiefreisetzungsrate eine weitere Analyse des gerissenen Zustandes benötigt wird. Es soll die Initiiierung eines einzelnen Risses ausgehend von einer einspringenden Ecke von Fügebauteil und Klebschicht betrachtet werden. Die gleichzeitige Entstehung zweier finiter Risse wäre zwar aufgrund der Symmetrie ebenfalls denkbar, doch kleine Abweichungen von der idealen Symmetrie sind in realen Fügungen unvermeidbar. Des Weiteren sind die beiden einspringenden Ecken der Klebverbindung hinreichend voneinander entfernt, so dass eine wechselseitige Beeinflussung mit deutlich erhöhten Energiefreisetzungsraten bei gleichzeitiger Rissinitiiierung nicht auftritt. In dieser Analyse werden gerade Risse innerhalb der Klebschicht betrachtet. Der Winkel, unter dem die finiten Risse auftreten, sowie deren Länge ergibt sich aus der Lösung des zum gekoppelten Kriterium gehörenden Optimierungsproblems. Daher müssen in dem numerischen Modell die Energiefreisetzungsraten der jeweiligen Risskonfigurationen als Funktion des Risswinkels  $\varphi$ , der finiten Risslänge  $\Delta a$  und, aufgrund der Nichtlinearität, auch als Funktion der Last ermittelt werden. Die untersuchten Risskonfigurationen sind in Abbildung 5.2 illustriert.

Es ist bekannt, dass sich aufgrund der Biegedeformation der schlanken Fügebauteile die Schnittreaktionen des Überlappungsbereichs mit zunehmender Belastung ändern. Dieser nichtlineare Effekt wurde bereits in Kapitel 3.3 diskutiert. Im vorliegenden Finite-Elemente-Modell erfolgt die Berücksichtigung dieser *geometrischen Nichtlinearität* durch eine iterative Lösung mit Neuberechnung der Steifigkeit in jedem Iterationsschritt. Dadurch wird der Effekt der sich ändernden Hebelarme durch die Deformationen berücksichtigt. Es wird weiterhin mit kleinen Verzerrungen gerechnet, d.h. der linearisierte Verzerrungstensor genügt. Bei der Umsetzung der Finite-Elemente-Routine in ABAQUS erfolgt die Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität durch die entsprechende Option NLGEOM. Dann wird in der Rechnung die vorgegebene Belastung in einzelnen Teilinkrementen aufgebracht. Innerhalb dieser Inkremente können mehrere Iterationsschritte benötigt werden, um eine Lösung zu finden, die die globalen Gleichgewichtsbedingungen erfüllt. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass die Spannungen und Verschiebungen auch bei Berücksichtigung der Nichtlinearität monoton mit der Last ansteigen. Es handelt



**Abbildung 5.3:** Darstellung des verwendeten Netzes für eine Konfiguration mit Klebschichtwinkel  $\alpha = 70^\circ$ . Dargestellt ist das Netz für eine Analyse eines Risses mit Länge  $\Delta a = 0,3 \text{ mm}$  und Risswinkel  $\varphi = 8^\circ$ . Man erkennt deutlich das Gebiet mit feinerem radialen Netz um die einspringende Ecke.

sich hierbei nicht um ein Durchschlags- oder Stabilitätsproblem, sondern um einen Versteifungseffekt der Struktur.<sup>44</sup>

Beim Aufbau des Finite-Elemente-Netzes wird eine Modellierungsstrategie mit Teilnetzen verwendet, die über Zwangsbedingungen verbunden werden. Damit ist es möglich den Bereich um die einspringende Ecke von Klebschicht und Füge-teil sehr fein zu vernetzen und in der restlichen Struktur ein gröberes Netz zu verwenden. In dem verwendeten radialen Netz wurde die Anzahl der Elemente in Umfangsrichtung und die Größe des innersten Elementes so gewählt, dass die Umgebung der Spannungssingularität hinreichend genau abgebildet ist und die Ergebnisse der Energiefreisetzungsrate netzunabhängig sind. Eine Untersuchung dieser Netzkonvergenz wurde auch in den Abschlussarbeiten von Hell (2011), Reuter (2012) und Felger (2013) umfassend dargestellt. Für die Vernetzung werden zweidimensionale Kontinuums-elemente mit vier Knoten und Bedingungen des ebenen Verzerrungszustandes verwendet<sup>45</sup>. Lediglich am Ursprung des radialen Netzes werden äquivalente Dreieckselemente<sup>46</sup> eingesetzt. Die Umsetzung des Netzes ist in Abbildung 5.3 illustriert. Die verwendeten Modelle haben, abhängig von der betrachteten Klebverbindungskonfiguration, rund 360 000 Freiheitsgrade.

Die Finite-Elemente-Routine erfolgt mittels der PYTHON-Schnittstelle des kommerziellen Finite-Elemente-Programms ABAQUS, so dass eine automatisierte Erzeugung der jeweiligen Strukturmodelle mit etwaigen Risskonfigurationen erfolgt. Auch die Auswertung des Spannungsfeldes sowie der für die Berechnung der Energiefreisetzungsrate benötigten Größen erfolgt über ein entsprechendes PYTHON-Skript. Die Berechnung der Spannungen und Energiefreisetzungs-raten der relevanten,

<sup>44</sup>Dieser wird mit der Theorie I. Ordnung nicht erfasst.

<sup>45</sup>In ABAQUS der Elementtyp CPE4

<sup>46</sup>In ABAQUS der Elementtyp CPE3

kinematisch möglichen Risskonfigurationen für eine typische Klebverbindungskonfiguration dauert mit der vorgestellten Finite-Elemente-Routine rund anderthalb bis zwei Stunden<sup>47</sup>. Wird nur ein bestimmter Risswinkel betrachtet, zum Beispiel nur Risse entlang des Interfaces, so reduziert sich die Rechenzeit auf etwa eine halbe Stunde.

### 5.3 Ermittlung der Energiefreisetzungsrate

Für die Berechnung der Energiefreisetzungsrate mittels dem verwendeten Finite-Elemente-Modell gibt es, wie in Kapitel 2.3 dargelegt, zwei grundlegende Ansätze: Die Berechnung über die Änderung der Gesamtenergie und die Auswertung des virtuellen Risschließintegrals. In beiden Fällen müssen für jede Risskonfiguration zwei Strukturanalysen durchgeführt werden. Dabei wird im Falle der ungerissenen Konfiguration die Verschiebung des Kraftangriffspunktes festgehalten. Dies entspricht der tatsächlichen Belastung in den meisten realen Bauteilen (Broberg, 1999), aber auch der Situation in experimentellen Untersuchungen, die häufig verschiebungsgesteuert durchgeführt werden.

Die Berechnung der Energiefreisetzungsrate kann durch die Auswertung der Differenz der inneren Energie beim Übergang vom ungerissenen (1) zum gerissenen Zustand (2) erfolgen:

$$\bar{G} = -\frac{\Delta \Pi^i}{\Delta A} = \frac{\Pi^{i(1)} - \Pi^{i(2)}}{\Delta A}. \quad (5.1)$$

Den anderen Zugang zur Berechnung der Energiefreisetzungsrate stellt das virtuelle Risschließintegral (2.48) dar. Für die Auswertung in der Finite-Elemente-Routine muss es in seiner diskretisierten Form (Rybicki u. Kanninen, 1977) verwendet werden. Dazu werden für die jeweiligen Rissöffnungsmoden die Knotenkräfte  $p$  der ungerissenen Konfiguration mit den Rissuferverschiebungen  $u, v$  der gerissenen Struktur multipliziert und für alle  $N$  Knoten entlang des finiten Risses aufsummiert:

$$\bar{G}_I = \frac{1}{2\Delta a b} \sum_{k=1}^N p_{yk}^{(1)} \left( v_k^{(2)+} - v_k^{(2)-} \right), \quad (5.2)$$

$$\bar{G}_{II} = \frac{1}{2\Delta a b} \sum_{k=1}^N p_{xk}^{(1)} \left( u_k^{(2)+} - u_k^{(2)-} \right). \quad (5.3)$$

Die Summe dieser beiden Anteile ist die gesamte inkrementelle Energiefreisetzungsrate

$$\bar{G} = \bar{G}_I + \bar{G}_{II}. \quad (5.4)$$

<sup>47</sup>Die Rechenzeit bezieht sich auf einen Rechner mit Intel® Core™i5-2300 mit vier Kernen (2,8GHz).

Dabei ist zu beachten, dass nur die erstgenannte Methode, die die Differenz der inneren Energie verwendet, für die Auswertung von nichtlinearen Analysen verwendet werden kann. Im Falle von Nichtlinearität müsste die verrichtete Risssschließarbeit unter Beachtung der Nichtlinearität über die Last integriert werden. Berechnet man die Energiefreisetzungsrate über die Analyse der Energiedifferenz, ist jedoch keine Auswertung der Beiträge der einzelnen Rissöffnungsmoden möglich. Für die Auswertung des gekoppelten Kriteriums stellt dies jedoch kein Hindernis dar, da nur die gesamte Energiefreisetzungsrate benötigt wird.

Des Weiteren muss angemerkt werden, dass die in Gleichung (5.3) angegebenen Moden I und II keine reinen Bruchmoden sind. Die Rissöffnungsmoden sind definiert für die Betrachtung eines Risses in einem unendlich ausgedehnten, isotropen Körper. Im vorliegenden Fall eines Risses an einer Grenzfläche oder in direkter Nähe derselben treten keine exakt symmetrischen bzw. antisymmetrischen Deformationen auf. Die Gültigkeit der Gleichung (5.4) ist davon unberührt, die Summe der beiden Modenanteile ergibt weiterhin die gesamte inkrementelle Energiefreisetzungsrate. Trotz des hier nicht exakten Begriffes der Rissöffnungsmoden werden im Folgenden die einzelnen Energiefreisetzungsratenanteile (5.3) genutzt, um den Einfluss einzelner Rissöffnungen auf die Energiefreisetzungsrate zu diskutieren.

## 5.4 Auswertung des gekoppelten Kriteriums

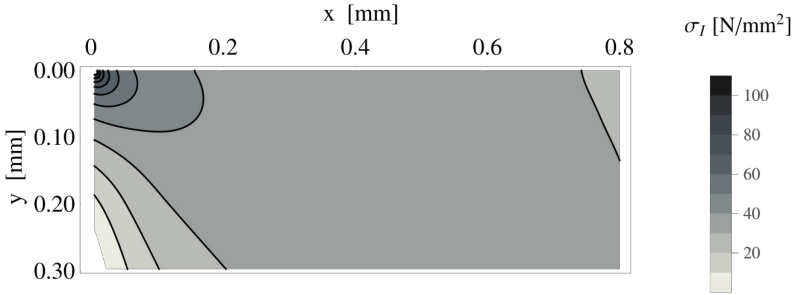
In der folgend vorgestellten Auswertung des gekoppelten Spannungs-Energie-Kriteriums ist die Ermittlung des Spannungszustandes und der Energiefreisetzungsraten von der Lösung des Optimierungsproblems getrennt. Bei der Analyse einer bestimmten Konfiguration werden zunächst alle nötigen Finite-Elemente-Analysen durchgeführt und die Ergebnisse zwischengespeichert. Dabei wird der gesamte Bereich betrachteter Risskonfigurationen untersucht und die jeweiligen Energiefreisetzungsraten werden berechnet. Die Ergebnisse der Finite-Elemente-Analysen werden dann in Form von Interpolationsfunktionen für den Optimierungsalgorithmus zur Verfügung gestellt. Dabei hängt die Spannungsfunktion nicht nur vom Punkt der Auswertung ( $r|\varphi$ ) ab, sondern aufgrund der Nichtlinearität auch nicht-trivial von der Last  $F$ . Dergleichen gilt für die Energiefreisetzungsrate, die auch eine Funktion der Position der Risspitze ( $r|\varphi$ ) und der Last  $F$  ist. Dazu werden in den Interpolationsfunktionen jeweils kubische Splines für die drei Parameter eingesetzt. Dabei wurde darauf geachtet eine ausreichende Zahl an Stützpunkten zu verwenden, um sehr genaue Interpolationen zu erhalten. Die Anzahl der Stützpunkte bezüglich des Parameters der Last  $F$  ergibt sich aus den Schrittweiten der nichtlinearen Finite-Elemente-Analyse. Voraussetzung hierfür ist jedoch, dass die aufgeprägte Belastung in den Finite-Elemente-Analysen ausreichend groß ist, so dass keine Auswertung der kubischen Splines außerhalb der Stützpunkte erfolgt. Eine solche Extrapolation kann bei kubischen Splines stark von den erwarteten Ergebnissen abweichen. Gegenüber einer linearen Interpolation sind jedoch die Stetigkeitseigen-

schaften von kubischen Splines bei der Auswertung im Optimierungsalgorithmus vorteilhaft.

Diese Interpolationsfunktionen werden dann verwendet, um mit Hilfe eines entsprechenden Algorithmus das Optimierungsproblem (2.75) des gekoppelten Kriteriums (2.72) zu lösen. Da die Risse nur in der Klebschicht auftreten können, ergibt sich für die maximale Risslänge aus der Klebschichtdicke und dem Risswinkel eine weitere Restriktion:  $\Delta a < t / \sin \varphi$ . In der Praxis wird diese Restriktion, aufgrund auftretender kleiner Risswinkel  $\varphi$ , jedoch nicht aktiv. Für die Lösung des Optimierungsproblems wird aus der Gruppe der lokalen Optimierungsalgorithmen mit Nebenbedingungen (Harzheim, 2008), die Methode der Sequential Least Squares Programming (SLSQP) (Kraft, 1994) verwendet. Dabei erfolgt die Berücksichtigung der Restriktionen über externe Straffunktionen. Um sicherzustellen, dass das globale Minimum gefunden wird, das die tatsächliche Lösung des gekoppelten Kriteriums darstellt, werden mehrere unterschiedliche Startpunkte verwendet. Umgesetzt ist die Lösung des Optimierungsproblems in PYTHON unter Nutzung des SciPy-Paketes, das auch den SLSQP-Algorithmus enthält. Die Lösung des Optimierungsproblems mittels dieser PYTHON-Umsetzung mit 20 unterschiedlichen Startpunkten erfolgt in weniger als zwei Sekunden.

Diese Vorgehensweise zur Umsetzung des gekoppelten Kriteriums unterscheidet sich wesentlich von der von Hebel (2010) verwendeten Vorgehensweise bei der numerischen Untersuchung von Delaminationen in Folge des Laminatrandeffekts. Hebel nahm keine Trennung der Ermittlung der Spannungen und Energiefreisetzungsrate von der Lösung des Optimierungsproblems vor. Ausgehend von einem beliebig gewählten Startwert einer Belastung wurden während der algorithmischen Lösung des Optimierungsproblems jeweils die Strukturanalysen der entsprechenden Risskonfiguration durchgeführt. Während dieser Rechnungen wird der eingangs durch die Spannungsanalyse ermittelte Winkel festgehalten. Somit können Algorithmen für eindimensionale Optimierungsprobleme genutzt werden. Die Rechnung muss so lange wiederholt werden, bis der Risswinkel konvergiert. Wenn kein Einfluss der Versagensparameter untersucht wird, kann dieser Weg performanter sein als der hier verfolgte Ansatz, der zunächst alle Risskonfigurationen untersucht und dann das Optimierungsproblem löst. Werden jedoch die Versagensparameter geändert, muss in der hier verwendeten Vorgehensweise lediglich das Optimierungsproblem algorithmisch effizient gelöst werden, ohne dass es neuer Finite-Elemente-Analysen bedarf. Des Weiteren erlaubt die Vorgehensweise eine detaillierte Analyse der Energiefreisetzungsrate.

Dem spröden Verhalten der Klebschicht entsprechend wird in dieser Analyse als Spannungsfunktion für die Auswertung des gekoppelten Kriteriums die Hauptnormalspannung (2.30) verwendet.



**Abbildung 5.4:** Hauptnormalspannungsverteilung in der Klebschicht in der Nähe der einspringenden Ecke von Füge- und Klebschicht.

## 5.5 Ergebnisse

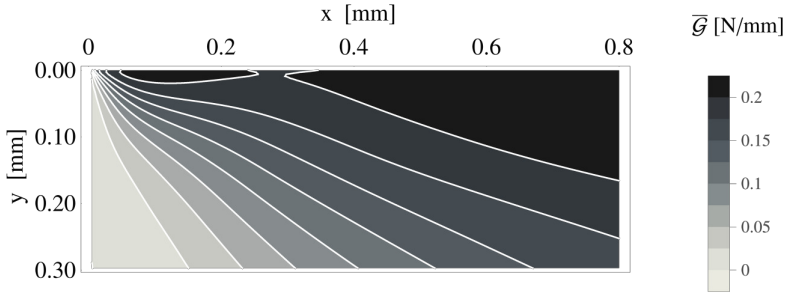
### 5.5.1 Spannungen und Energiefreisetzungsrate

Die Ergebnisse der Spannungsanalyse liefern die bekannten, bereits diskutierten Zusammenhänge und sollen daher nur kurz diskutiert werden. An den Rändern des Überlappungsbereichs ergeben sich erhöhte Spannungen, insbesondere die Schub- und die Schälspannungen sind in diesem Bereich stark konzentriert. An den Bi-Materialpunkten von Füge- und Klebschicht ergeben sich singuläre Spannungen. In Abbildung 5.4 ist die Verteilung der Hauptnormalspannung in der Umgebung der linken einspringenden Ecke von Füge- und Klebschicht, die Ausgangspunkt der Rissinitiierung ist, dargestellt. Man erkennt deutlich den starken Spannungsgradienten an der linken oberen Ecke. Die Hauptnormalspannung nimmt im abgebildeten Bereich mit zunehmendem Abstand von der einspringenden Ecke monoton ab.

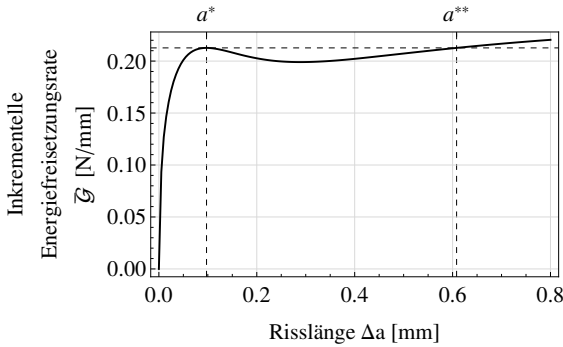
Ein typisches Ergebnis der Auswertung der inkrementellen Energiefreisetzungsrate ist in Abbildung 5.5 dargestellt. Dabei ist an jedem Punkt  $(x, z)$  die Energiefreisetzungsrate eines Risses mit entsprechender Risspitzenposition dargestellt. Für steile Risse in der Klebschicht ( $\varphi$  groß) ergeben sich erwartungsgemäß relativ kleine Energiefreisetzungsraten. Mit kleinerem Winkel  $\varphi$  ergeben sich größere Energiefreisetzungsrate. Aber aufgrund der Deformationsbehinderungen durch das steife Füge- und Klebschicht ist der Winkel maximaler Energiefreisetzungsrate nicht  $0^\circ$ , sondern etwa  $2^\circ$ . Für sehr kleine Risslängen liefert die Auswertung der Energiefreisetzungsrate immer kleinere Werte. Wie in Kapitel 2.4 gezeigt, muss die inkrementelle Energiefreisetzungsrate im vorliegenden Fall im Grenzübergang  $a \rightarrow 0$  verschwinden.<sup>48</sup>

<sup>48</sup>Dieser Grenzübergang kann auch mit dem vorliegenden numerischen Modell untersucht werden. Dafür muss jedoch die Energiefreisetzungsrate sehr kurzer Risse berechnet werden, wofür ein





**Abbildung 5.5:** Darstellung der Energiefreisetzungsrate der betrachteten Risskonfigurationen. Jede Risskonfiguration ist hierbei charakterisiert durch die Koordinate  $(x, y)$  der Rissspitze.

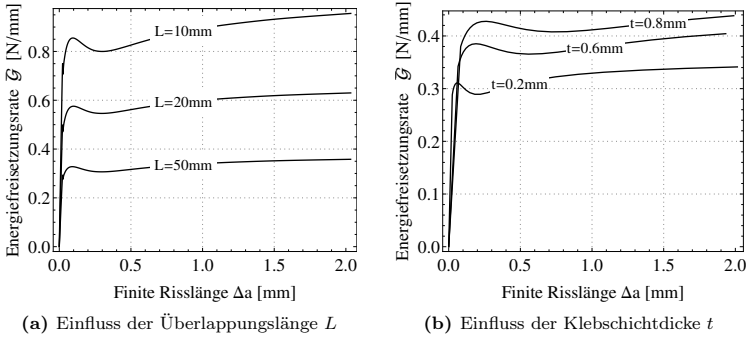


**Abbildung 5.6:** Energiefreisetzungsrate von Risskonfigurationen entlang der Grenzschicht ( $\varphi = 0$ ).

Insgesamt stellt sich jedoch keine monotone Zunahme der Energiefreisetzungsrate ein. Für Risslängen von hier etwa 0,2 mm ergibt sich ein lokales Maximum. Dieses Maximum wird noch deutlicher, wenn man eine Darstellung der Energiefreisetzungsrate für einen festgehaltenen Winkel wählt, siehe Abbildung 5.6. In dieser Abbildung ist die Risslänge des lokalen Maximums der Energiefreisetzungsrate als  $a^*$  angegeben. Die Risslänge, die nach dem Durchschreiten des lokalen Minimums

---

sehr feines Netz benötigt wird. Für eine netzunabhängige Lösung müssen über die Risslänge mindestens zehn Elemente verwendet werden. Dementsprechend steigt die Gesamtanzahl der Freiheitsgrade stark an und durch die stark unterschiedlichen Elementgrößen wird die Konditionierung des numerischen Problems schlechter.

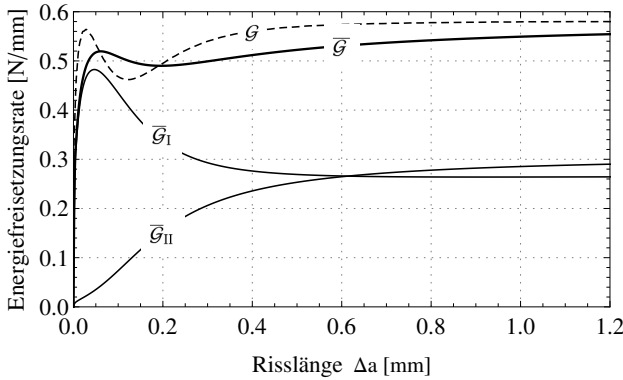


**Abbildung 5.7:** Einfluss geometrischer Parameter auf die inkrementelle Energiefreisetzungsrates. (Konfiguration:  $F = 13,5\text{ kN}$ ,  $h = 3\text{ mm}$ ,  $L = 50\text{ mm}$ ,  $t = 0,3\text{ mm}$ , Stahl-Epoxy)

zum gleichen Betrag der Energiefreisetzungsrates führt, ist mit  $a^{**}$  bezeichnet. Beide Größen werden im Folgenden benutzt, um das nicht-monotone Verhalten der Energiefreisetzungsrates zu diskutieren. Die Energiefreisetzungsrates steigt nicht monoton mit der Risslänge an. Nach dem starken Anstieg für sehr kleine Risslängen ergibt sich ein lokales Maximum der Energiefreisetzungsrates. Nach einem lokalen Minimum ergibt sich wieder eine monoton steigende Energiefreisetzungsrates, wie sie in den meisten Struktursituationen auftritt. Parameterstudien haben gezeigt, dass dieses nicht-monotone Verhalten bei allen Klebverbindungskonfigurationen auftritt. Dabei zeigt sich, dass lediglich die Überlappungslänge und die Klebschichtdicke einen Einfluss auf diesen charakteristischen Verlauf der Energiefreisetzungsrates haben. Abbildung 5.7(a) zeigt den Einfluss der Überlappungslänge. Mit größerer Überlappungslänge sinkt der Betrag der Energiefreisetzungsrates, da der Kraftfluss dann weniger stark am Rand der Überlappungslänge konzentriert ist. Der nicht-monotone Effekt, also der relative Unterschied zwischen lokalem Minimum und Maximum, ist bei kleinen Überlappungslängen ausgeprägter. Die Risslänge des lokalen Maximums  $a^*$  sowie die Risslänge des gleichen Betrags  $a^{**}$  sind von der Überlappungslänge unabhängig. Der Effekt der Klebschichtdicke ist in Abbildung 5.7(b) dargestellt. Die Energiefreisetzungsrates steigt mit zunehmender Klebschichtdicke. Dies ist darin begründet, dass der in der Klebschicht gespeicherte Energieanteil mit der Klebschichtdicke steigt. Die Klebschichtdicke hat, im Gegensatz zur Überlappungslänge, auf die ausgezeichneten Risslängen  $a^*$  und  $a^{**}$  einen eindeutigen Effekt. Beide Risslängen zeigen eine näherungsweise lineare Abhängigkeit. Bei typischen Überlappungsfügungen mit Stahlfügeteilen gilt

$$a^* \approx 0,3t \quad a^{**} \approx 1,5t. \quad (5.5)$$

Bei niedrigerem Elastizitätsmodul des Fügeteils ergeben sich für beide Risslängen



**Abbildung 5.8:** Darstellung der Moden der inkrementellen Energiefreisetzungsrate. Die Ermittlung erfolgt durch Auswertung des virtuellen Risschließintegrals in seiner diskretisierten Form (5.3). Als gestrichelte Linie dargestellt ist die entsprechende differentielle Energiefreisetzungsrate  $\mathcal{G}$  (Berechnung mittels Gleichung (2.70)). (Konfiguration:  $F = 8 \text{ kN}$ ,  $h = 2 \text{ mm}$ ,  $L = 30 \text{ mm}$ ,  $t = 0,3 \text{ mm}$ , Stahl-Epoxy)

kleinere Werte. Der charakteristische Verlauf der Energiefreisetzungsrate ergibt sich auch bei Betrachtung geometrischer Linearität. Es findet lediglich eine betragsmäßige Überschätzung der Energiefreisetzungsrate statt. Dies erlaubt die Nutzung des virtuellen Risschließintegrals zur Untersuchung des Einflusses der Rissöffnungsmoden. Abbildung 5.8 zeigt das Ergebnis einer solchen Analyse. Als gestrichelte Lösung ist die differentielle Energiefreisetzungsrate für unterschiedliche Risslängen angegeben. Dies entspricht der Energiefreisetzungsrate bei einer infinitesimalen Verlängerung eines Risses der Länge  $\Delta a$ . Die differentielle Energiefreisetzungsrate lässt sich aus der inkrementellen Energiefreisetzungsrate (2.70) berechnen. Da die inkrementelle Energiefreisetzungsrate die mittlere differentielle Energiefreisetzungsrate darstellt, hat letztere ihr Maximum bei kürzeren Risslängen. Aus der Beziehung der differentiellen und inkrementellen Energiefreisetzungsrate folgt, dass diese jeweils beim lokalen Maximum und Minimum der differentiellen Energiefreisetzungsrate gleich groß sind.

Die Ergebnisse in Abbildung 5.8 zeigen deutlich, dass das nicht-monotone Steigen durch den Modus-I Anteil der Energiefreisetzungsrate entsteht. Der Modus-II Anteil zeigt ein streng monotonen Verhalten. In der Literatur finden sich vergleichbare Energiefreisetzungsrate für andere strukturelle Situationen. So etwa für den Fall von Delaminationen in Folge des Laminatrandeffekts (Rybicki et al., 1977, Wang u. Crossman, 1980). Krueger et al. (2000) zeigen ein solches Ergebnis für den Fall von Delaminationen von laminierten Stringern. Und auch im Falle

von Delaminationen von Verstärkungspflastern wurde von Krueger (2004) eine nicht-monotone Energiefreisetzungsrates beobachtet. In der Arbeit von Müller et al. (2006) wurde die Rissinitiierung in Fügungen von Brennstoffzellenstacks untersucht. Auch hier ergibt sich ein lokales Maximum der Energiefreisetzungsrates und die Autoren zeigen, dass dessen Maximum nahezu linear mit der Dicke der Klebschicht zusammenhängt. Martin et al. (2008) untersuchen die Ablösung einer Faser in einem Faser-Matrixverbund. Sie beobachten ein lokales Maximum der Energiefreisetzungsrates für kurze finite Risse entlang der Grenzschicht von Faser und Matrix. Alle Struktursituationen haben einen geschichteten Aufbau mit starkem elastischem Kontrast der jeweiligen Schichten gemein. Es sei angemerkt, dass in der von Hebel (2010) durchgeführten Analyse von Delaminationen in Laminaten kein solcher Effekt beobachtet wurde, da bei der von ihm untersuchten Belastung der Modus-I-Beitrag der Energiefreisetzungsrates null ist.

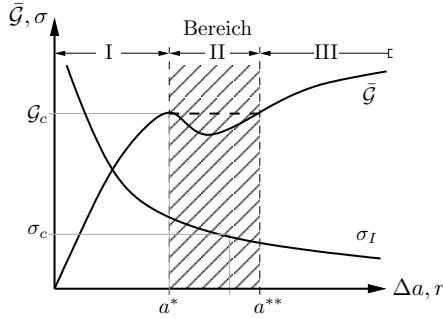
### 5.5.2 Auswertungen der Routine

Eine Auswertung des Optimierungsproblems liefert die Versagenslast  $F_f$  sowie die zugehörige finite Risslänge  $\Delta a$  und den Risswinkel  $\varphi_f$ . Bei der Analyse typischer Klebverbindungskonfigurationen zeigt sich, dass die nicht-monotone Energiefreisetzungsrates erheblichen Einfluss auf die Lösung des Optimierungsproblems hat. Es ergeben sich, wie in Abbildung 5.9 dargestellt, drei mögliche Lösungsbereiche. Die Lösungsbereiche sind durch die eingeführten, ausgezeichneten Risslängen  $a^*$  und  $a^{**}$  definiert:

$$\begin{aligned} \text{Bereich I:} \quad & 0 < \Delta a < a^*, \\ \text{Bereich II:} \quad & a^* \leq \Delta a \leq a^{**}, \\ \text{Bereich III:} \quad & a^{**} < \Delta a. \end{aligned} \tag{5.6}$$

In Bereich I und III sind sowohl die Spannungsfunktion als auch die Energiefreisetzungsrates monotone Funktionen. Die Ungleichungen im gekoppelten Spannungs- und Energieteilkriterium entarten damit zu Gleichungen. Die Lösung des Optimierungsproblems ergibt sich, wenn beide Teilkriterien für die gleiche Risslänge vollständig erfüllt sind. In Bereich II allerdings ist immer die Risslänge  $a^*$  mit der kleinsten Versagenslast assoziiert. Denn für die Risslängen  $a^*$  und  $a^{**}$  ergibt sich die höchste Energiefreisetzungsrates und gleichzeitig für  $a^*$  ein höherer Wert der Spannungsfunktion. Selbst wenn bei Erfüllung des Energieteilkriteriums  $\bar{\mathcal{G}}(a^*) = \mathcal{G}_c$  das Spanningskriterium übererfüllt ist, kann sich keine größere Risslänge einstellen. Eine solche Konfiguration von  $\sigma_c$  und  $\mathcal{G}_c$  ist in Abbildung 5.9 aufgezeigt. Dieses Verhalten kann bei stetigen Parametervariationen durch einen Übergang von Lösungsbereich II zu III zu Unstetigkeiten in der vorhergesagten finiten Risslänge führen.

Bei der Analyse typischer Klebverbindungskonfigurationen ergeben sich Risswinkel zwischen  $\varphi_f = 1^\circ$  und  $5^\circ$ . Damit liegen die vorhergesagten Risse, wie erwartet, nahe



**Abbildung 5.9:** Effekt der nicht-monotonen Energiefreisetzungsrates auf die Lösung des Optimierungsproblems: Bereiche möglicher Risslängen.

an der Grenzschicht von Füge­teil und Klebschicht. Wie bei der Diskussion der Energiefreisetzungsrates gezeigt, wird bei Rissen unter einem kleinen Winkel  $\varphi$  aufgrund geringerer Deformationsbehinderung mehr Energie freigesetzt. Betrachtet man allerdings die Versagenslasten des Optimierungsproblems bei freiem Winkel und einem auf  $\varphi = 0^\circ$  festgelegten Winkel, so ergeben sich nur kleine Unterschiede. Rechnet man mit einem auf  $0^\circ$  festgelegten Winkel, kommt es zu einer Überschätzung der Versagenslast gegenüber einer Analyse mit beliebigem Risswinkel  $\varphi$ . Die maximale Abweichung, die festgestellt wurde, beträgt etwa ein Prozent und tritt bei Klebverbindungen mit sehr kurzer Überlappungslänge ( $L \leq 10 \text{ mm}$ ) auf, deren Analyse einen Risswinkel von rund  $5^\circ$  ergibt. Daher erscheint es zulässig, den Risswinkel auf  $0^\circ$  festzulegen und damit die notwendige Rechenzeit der Strukturanalyse auf ein Drittel zu reduzieren.

## 5.6 Diskussion der Stabilität der initiierten Risse

Die Lösung des gekoppelten Kriteriums im Rahmen der Finiten Bruchmechanik ergibt eine Rissinitiierungslast sowie die entsprechende Risslänge. Es wird keine Aussage über das weitere Versagen gemacht. Da nach Rissinitiierung ein Riss vorliegt, können die Methoden der klassischen Bruchmechanik für eine Bewertung herangezogen werden. In diesem Abschnitt soll das Verhalten der initiierten Risse betrachtet werden.

Vor der Initiierung der Risse liegt am Bi-Materialpunkt von Füge­teil und Klebschicht eine schwache Singularität vor. Eine Analyse dieser Spannungskonzentration mit dem gekoppelten Kriterium im Rahmen der Bruchmechanik finiter Risse erfolgt dabei unter Berücksichtigung der inkrementellen Energiefreisetzungsrates. Der initiierte Riss zeigt wieder eine typische Riss­spitzensingularität und kann mit den

klassischen Methoden der Bruchmechanik bewertet werden. Dabei erfolgt eine Auswertung der differentiellen Energiefreisetzungsrate. Die Stabilitätsbedingung eines Risses ist (Anderson, 2005) (vgl. Gleichung (2.59)<sup>49</sup>)

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_c \quad \wedge \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a} \leq 0. \quad (5.7)$$

Erfüllt ein Riss diese Bedingung, so wird er als stabil bezeichnet: Es kommt zu keinem Risswachstum ohne Erhöhung der äußeren Last. Ist ein Riss instabil so wird er sich ohne Erhöhung der äußeren Last spontan ausbreiten.

Da die inkrementelle Energiefreisetzungsrate als gemittelte differentielle Energiefreisetzungsrate aufgefasst werden kann (Gleichung (2.68))

$$\bar{\mathcal{G}} = \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} \mathcal{G}(\tilde{a}) d\tilde{a},$$

sind diese im Allgemeinen nicht gleich. Aus Gleichung (2.70)

$$\mathcal{G}(\Delta a) = \frac{d}{d\Delta a} (\Delta a \bar{\mathcal{G}}(\Delta a)) = \bar{\mathcal{G}}(\Delta a) + \Delta a \frac{\partial \bar{\mathcal{G}}(\Delta a)}{\partial \Delta a}$$

ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{G}} < \mathcal{G} & \quad \text{wenn} \quad \frac{\partial \bar{\mathcal{G}}}{\partial \Delta a} > 0, \\ \bar{\mathcal{G}} > \mathcal{G} & \quad \text{wenn} \quad \frac{\partial \bar{\mathcal{G}}}{\partial \Delta a} < 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

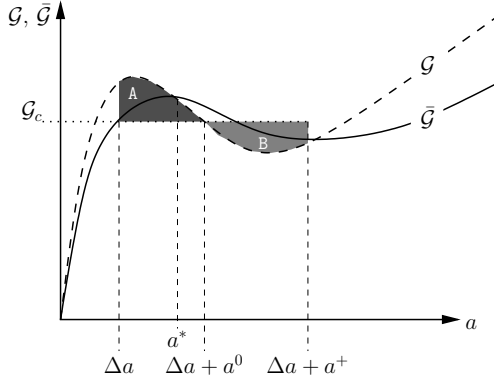
Bis zu ihrem ersten Maximum ( $\Delta a = a^*$ ) ist die inkrementelle Energiefreisetzungsrate also kleiner als die differentielle. Das Gleiche gilt wieder nach dem Minimum der inkrementellen Energiefreisetzungsrate. In Abbildung 5.10 ist der Verlauf der inkrementellen und differentiellen Energiefreisetzungsrate für eine typische einschichtige Überlappungsfügung dargestellt.

Alle initiierten Risse, die eine finite Risslänge größer als  $a^{**}$  haben und damit in Bereich III liegen, sind mit einer positiven Ableitung der differentiellen Energiefreisetzungsrate assoziiert. Dementsprechend sind alle initiierten Risse in diesem Bereich instabil und wachsen ohne weitere Steigerung der Last. Ein finiter Riss der Länge  $a^*$ , der sich im Lösungsbereich II ergibt, ist stabil. Die inkrementelle Energiefreisetzungsrate stimmt mit der differentiellen überein und die Ableitung letzterer ist negativ. Es ist also eine weitere Steigerung der Belastung nötig, um ein Wachstum des initiierten Risses zu erreichen.

Im Lösungsbereich I des Optimierungsproblems ergibt sich eine besondere Situation. Die folgende Betrachtung ist in Abbildung 5.10 illustriert. Da die initiierten

---

<sup>49</sup>Hier nun  $R = \mathcal{G}_c = \text{const.}$



**Abbildung 5.10:** Stabilität eines finiten Risses  $\Delta a$  in Bereich I.

Risse die Energiebedingung der Finiten Bruchmechanik, die mit der inkrementellen Energiefreisetzungsrates formuliert ist, erfüllen müssen, sind alle Risse mit einer differentiellen Energiefreisetzungsrates, die über der Bruchzähigkeit liegt, assoziiert. Alle Risse werden also zunächst weiter wachsen. Mindestens bis die differentiell Energiefreisetzungsrates des verlängerten Risses nur noch der Bruchzähigkeit entspricht ( $\mathcal{G} = \mathcal{G}_c$ ). Ist der finite Riss jedoch sehr kurz, liegt das Minimum der differentiellen Energiefreisetzungsrates über der Bruchzähigkeit und die Stabilitätsbedingung  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_c$  kann nicht erreicht werden. Dann wird der Riss vollständig instabil weiterlaufen. Der Fall, dass die Bruchzähigkeit über dem Minimum der differentiellen Energiefreisetzungsrates liegt, ist in Abbildung 5.10 dargestellt. Man erkennt, dass der initiierte Riss der Länge  $\Delta a$  mindestens um  $a^0$  weiterläuft, so dass  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_c$ . Dem Rissfortschritt steht aber mehr Energie zur Verfügung als für die Bildung des Risses notwendig ( $\mathcal{G} > \mathcal{G}_c$ ). Diese überschüssige Energie ist als Fläche A in Abbildung 5.10 dargestellt. Wenn diese Energie für den Bruchprozess genutzt werden kann, wird der Riss weiterschreiten obgleich  $\mathcal{G} < \mathcal{G}_c$ . Maximal kann der Riss weiterwachsen, bis die überschüssige Energie vollständig für den Bruchprozess genutzt wird (Fläche B). Die Länge  $a^+$ , um die der Riss nach Initiierung fortschreitet, ergibt sich aus:

$$\underbrace{\int_{\Delta a}^{\Delta a + a^0} (\mathcal{G}(a) - \mathcal{G}_c) da}_{\text{Fläche A in Abbildung 5.10}} = \rho \underbrace{\int_{\Delta a}^{\Delta a + a^+} (\mathcal{G}_c - \mathcal{G}(a)) da}_{\text{Fläche B in Abbildung 5.10}} . \quad (5.9)$$

Für den allgemeinen Fall mehrerer Minima wird folgende Formulierung dieser

Gleichung mit Föppl-Klammern<sup>50</sup> vorgeschlagen:

$$\int_{\Delta a}^{\Delta a+a^+} \langle \mathcal{G}(a) - \mathcal{G}_c \rangle da = \rho \int_{\Delta a}^{\Delta a+a^+} \langle \mathcal{G}_c - \mathcal{G}(a) \rangle da. \quad (5.10)$$

Der Anteil  $\rho$  ( $0 \leq \rho \leq 1$ ) der überschüssigen Energie, der für weitere Bruchprozesse bereit steht, wird von der strukturellen Situation sowie von dynamischen Effekten abhängen. Wächst der Riss dabei weiter als das Minimum der differentiellen Energiefreisetzungsrates, tritt mit  $\partial \mathcal{G} / \partial \Delta a > 0$  instabiles Risswachstum ein. In der Literatur finden sich Hinweise zu dynamischen Rissen mit Rissarrest und verzögerter Reinitiierung (Broberg, 1999, S. 656). Dabei tragen Deformationswellen im Körper (kinetische Energie während des dynamischen Rissprozesses) zu oszillierenden Energiefreisetzungsrates bei. Dadurch kann es zum Rissarrest mit folgender (möglicherweise mehrfacher) Reinitiierung kommen. Aber selbst wenn angenommen wird, dass die Überschussenergie nicht für weiteren Rissfortschritt genutzt werden kann, gibt es finite Risse, die trotz negativer Ableitung der differentiellen Energiefreisetzungsrates wachsen und dann zum Rissarrest kommen. Ebenfalls kann es auch finite Risse geben, die nach der Initiierung weiterwachsen, das Minimum der differentiellen Energiefreisetzungsrates überwinden und vollständig instabil werden.

In der Literatur findet sich keine Betrachtung des Stabilitätsverhaltens von initiierten Rissen bei Vorliegen einer nicht-monotonen Energiefreisetzungsrates. Lediglich in der Analyse von Leguillon u. Martin (2013a), welche die Behinderung von Rissausbreitung durch einen elastischen Kontrast untersuchen, wird möglicher Rissarrest bei instabilem Risswachstum mit  $\mathcal{G} > \mathcal{G}_c$  und der resultierende Energieüberschuss diskutiert.

## 5.7 Vergleich mit Experimenten

In diesem Abschnitt sollen die mittels der numerischen Umsetzung des gekoppelten Kriteriums gewonnenen Ergebnisse zur Versagenslast mit experimentellen Befunden verglichen werden.

Für den Vergleich werden drei experimentelle Studien mit einschnittigen Überlappungsfügungen mit spröden Klebstoffen herangezogen. Zum einen die Studie über den Einfluss der Überlappungslänge von da Silva et al. (2004). In dieser Studie wurden Stahlfügeteile mit dem spröden Strukturkleber Redux 326 der Firma Hexcel Corporation verklebt, ein heißhärtender Hochtemperaturklebstoff aus der Gruppe der Bismaleimide. Ebenso werden die Ergebnisse von da Silva et al. (2006) über den Einfluss der Klebschichtdicke herangezogen. In dieser Studie wurden zwei unterschiedliche Epoxidharz-Klebstoffe verwendet, um Stahlfügeteile zu verbinden: Zum

---

<sup>50</sup>Engl.: Macaulay brackets



	Redux 326	AV138/HV998	Hysol EA 9321	Hysol EA 9514
$E_a$ [N/mm <sup>2</sup> ]	4440	4890	3870	1780
$\nu_a$ [-]	0.35	0.35	0.36	0.33
$\sigma_c$ [N/mm <sup>2</sup> ]	50.9	39.5	46.0	49.0
$\mathcal{G}_c$ [N · mm <sup>-1</sup> ]	(0.2-0.4)	0.38	0.45	0.92
Quellen	da Silva et al. (2009b, 2004)	Campilho et al. (2011), da Silva et al. (2006)	da Silva et al. (2006)	Pirondi u. Moroni (2009), Castagnetti et al. (2011)

**Tabelle 5.1:** Materialparameter der in den experimentellen Untersuchungen verwendeten Klebstoffe.

einen Araldite AV138 mit Härter HV998 der Firma Huntsman und zum anderen Hysol 9321 der Firma Henkel. Beide sind Zweikomponentenkleber, die bei Raumtemperatur ausgehärtet werden. Es werden ebenfalls die experimentellen Daten der Studie zum Einfluss der Klebschichtdicke von Castagnetti et al. (2011) betrachtet. In dieser Studie wurden Stahlfügeteile mit einer Epoxidharzklebung, Hysol 9514 der Firma Henkel, untersucht. Dies ist ein heißhärtender Einkomponentenkleber.

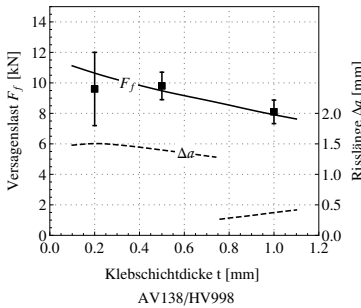
Alle Versuche wurden zwischen vier und sechs mal wiederholt. Alle Experimente wurden bei Raumtemperatur mit einer verschiebungsgesteuerten Belastung mit einer Belastungsgeschwindigkeit von  $1 \text{ mm} \cdot \text{min}^{-1}$  durchgeführt. Die Klebschichtdicken wurden in den Experimenten mit entsprechenden Abstandshaltern eingestellt. Weitere Details finden sich in den entsprechenden Publikationen.

Die beiden für die Auswertung des gekoppelten Kriteriums benötigten Versagensparameter, Festigkeit und Bruchzähigkeit, sind für den jeweiligen Klebstoff der Literatur entnommen. Allein für den Bismaleimidklebstoff Redux 326 konnte kein eindeutiger Wert, sondern lediglich ein Bereich plausibler Werte für die Bruchzähigkeit gefunden werden. Die verwendeten Materialparameter und ihre Quellen sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst.

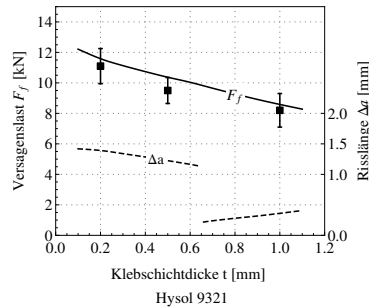
In der Finite-Elemente-Modellierung wird für alle untersuchten Fügungen ein Klebfugenwinkel von  $\alpha = 90^\circ$  angenommen. Damit werden eventuell vorhandene Kehlen am Ende der Klebschicht vernachlässigt, was zu einer konservativen Abschätzung der Versagenslast führt (vgl. Kapitel 3.2). Der Winkel des Risses  $\varphi$  ist nicht festgelegt und ergibt sich aus der Lösung des Optimierungsproblems.<sup>51</sup>

In Abbildung 5.11 ist der Vergleich zu den experimentellen Ergebnissen zu sehen. Ebenfalls aufgezeigt sind die Ergebnisse der finiten Risslänge auch, wenn dazu in den Experimenten keine Ergebnisse aufgezeichnet wurden. Der Vergleich mit der

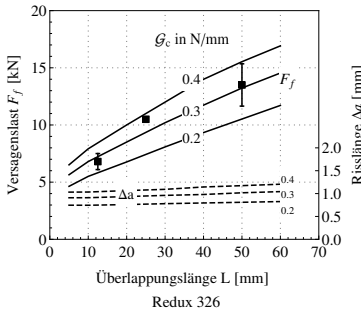
<sup>51</sup>Auch hier hätte eine Beschränkung des Winkels auf  $\varphi = 0$  nur zu geringfügig erhöhten Werten für die Rissinitiationslasten geführt.



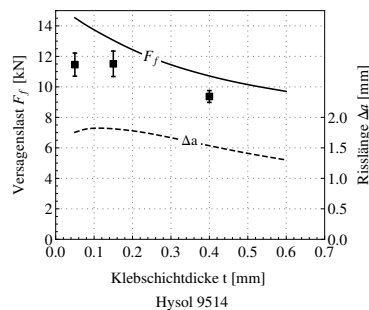
(a) Untersuchung des Klebschichtdickenefekts (Klebverbindungskonfiguration:  $b = 25$  mm,  $h = 2$  mm,  $L = 25$  mm)



(b) Untersuchung des Klebschichtdickenefekts (Klebverbindungskonfiguration:  $b = 25$  mm,  $h = 2$  mm,  $L = 25$  mm)



(c) Untersuchung des Einflusses der Überlappungslänge (Klebverbindungskonfiguration:  $b = 25$  mm,  $h = 2$  mm,  $t = 0,12$  mm)



(d) Untersuchung des Klebschichtdickenefekts (Klebverbindungskonfiguration:  $b = 25$  mm,  $h = 1,6$  mm,  $L = 12,7$  mm)

**Abbildung 5.11:** Vergleich mit experimentell ermittelten Versagenslasten. Dar- gestellt sind die Versagenslastvorhersagen (schwarz) und die finiten Risslängen (gestrichelt). Die experimentellen Ergebnisse sind mit Fehlerbalken dargestellt.

experimentellen Studie von da Silva et al. (2006) (Abbildung 5.11a,b) zeigt eine sehr gute Übereinstimmung. Die größte Abweichung liegt unter 11%. Die Ergebnisse liegen innerhalb der Standardabweichung der experimentellen Daten. Der Einfluss der Klebschichtdicke auf die Ergebnisse ist korrekt abgebildet. Bemerkenswert ist, dass es in dieser Konfiguration zum zuvor diskutierten Effekt unstetiger Risslängen bei stetiger Parametervariation kommt. Wie in Kapitel 5.5.1 diskutiert, hängen die Risslänge  $a^*$  sowie die Risslänge der Energiefreisetzungsrates gleichen Betrages  $a^{**}$  linear von der Klebschichtdicke ab. So verschieben sich auch die Lösungsbereiche des Optimierungsproblems hin zu höheren Klebschichtdicken. Dadurch kommt

es bei einer Klebschichtdicke von jeweils etwa 0,7 mm zu einem Wechsel des Lösungsbereiches von III zu II. Die Risswinkel  $\varphi_f$  liegen im Bereich von  $1^\circ$ - $4^\circ$ .

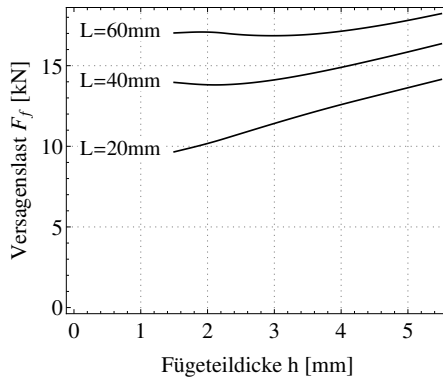
Der Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen von da Silva et al. (2004) (5.11(c)) zeigt für den untersuchten Wertebereich der Bruchzähigkeit eine gute Übereinstimmung mit den Experimenten. Lediglich bei einer Überlappungslänge von 25 mm ergibt sich, auch aufgrund der sehr kleinen Standardabweichung des experimentellen Datenpunktes<sup>52</sup>, eine größere Abweichung. Der qualitative Einfluss der Überlappungslänge auf die Versagenslast ist aber sehr gut abgebildet. Die vorhergesagten Risslängen sind nahezu unabhängig von der Überlappungslänge und die Risswinkel liegen im Bereich  $\varphi_f = 2, \dots, 4^\circ$ .

Die Gegenüberstellung der Ergebnisse der vorliegenden Routine mit den Experimenten von Castagnetti et al. (2011) (Abbildung 5.11(d)) zeigt eine etwas größere Abweichung als die vorangegangenen Vergleiche. Die maximale Abweichung der Versagenslast ergibt sich bei einer Klebschichtdicke von 0,05 mm und liegt bei 25%. Die Vorhersagen der Versagenslasten sind nicht konservativ. Die größere Abweichung kann darin begründet sein, dass der Klebstoff Hysol 9514 insgesamt ein weniger sprödes Bruchverhalten zeigt. Dies ist auch an den längeren vorhergesagten Risslängen zu erkennen. Die Voraussetzung von sprödem Verhalten der Finiten Bruchmechanik ist damit nicht mehr hinreichend erfüllt. Im folgenden Kapitel 6 wird diese Voraussetzung hinreichender Sprödigkeit diskutiert und ein Verfahren zu deren Quantifizierung vorgeschlagen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die vorliegende numerische Umsetzung des gekoppelten Kriteriums eine gute bis sehr gute Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen zeigt. Insbesondere hervorzuheben ist die Tatsache, dass keine Anpassung der Materialparameter – Festigkeit  $\sigma_c$  und Bruchzähigkeit  $\mathcal{G}_c$  – erfolgt ist. Es wurden lediglich in der Literatur angegebene Werte für die Festigkeit und Bruchzähigkeit verwendet. Der Klebschichtdickeneffekt – abnehmende Versagenslasten mit zunehmender Klebschichtdicke (siehe Diskussion in Kapitel 3.2) – wird vom vorliegenden Modell korrekt abgebildet. Während die Spannungen mit zunehmender Klebschichtdicke abnehmen, da ein gleichmäßiger Kraftfluss erfolgen kann, steigt die Energiefreisetzungsrate mit der Klebschichtdicke an, da in der dickeren Klebschicht mehr Formänderungsenergie gespeichert ist. Durch die Berücksichtigung der Energie kann der Einfluss der Klebschichtdicke auf die Versagenslasten von spröden Klebverbindungen korrekt abgebildet werden. Für den Fall von sprödem Versagen kann also eine physikalische Erklärung des Klebschichtdickeneffekts gegeben werden, der immer noch Stand der Forschung ist. Die in der Literatur vorhandenen Deutungen dieses Effektes sind im einleitenden Kapitel 3.2 diskutiert.

---

<sup>52</sup>In der Veröffentlichung von da Silva et al. (2004) werden zur stark unterschiedlichen Größe der Standardabweichung keine Angaben gemacht.



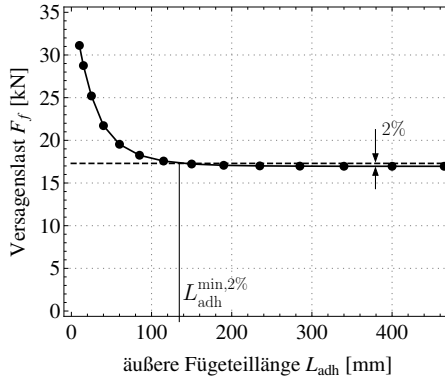
**Abbildung 5.12:** Einfluss der Fügeiteildicke  $h$  auf die Versagenslast der betrachteten einschnittigen Überlappungsfügung. (Konfiguration:  $t = 30,3$  mm, Stahl-Epoxy)

## 5.8 Studien

### 5.8.1 Einfluss der Geometrie und der elastischen Konstanten

In diesem Abschnitt soll der Effekt der geometrischen Parameter und der elastischen Konstanten der betrachteten einschnittigen Klebverbindung auf die Versagenslast diskutiert werden. Neben den im Vergleich zu experimentellen Studien bereits diskutierten Parametern, Überlappungslänge und Klebschichtdicke, gibt es die Parameter Fügeiteildicke  $h$ , Klebfugenwinkel  $\alpha$  und äußere Fügeiteillänge  $L_{adh}$  (vgl. Abbildung 5.1), sowie die elastischen Kenngrößen der Fügeiteile und der Klebschicht.

Die Fügeiteildicke  $h$  kontrolliert entscheidend die Steifigkeit der Fügeiteile. Mit steigender Dehnsteifigkeit der Fügeiteile reduziert sich die Schubspannung in der Klebschicht und durch eine steigende Biegesteifigkeit der Fügeiteile wird die Schälspannung reduziert. Also wird ein Ansteigen der Versagenslast bei steigender Fügeiteildicke erwartet. Abbildung 5.12 zeigt die Ergebnisse der vorliegenden Umsetzung des gekoppelten Kriteriums für eine Studie zum Einfluss der Fügeiteildicke. Man erkennt deutlich, dass die Versagenslast wie erwartet mit der Fügeiteildicke steigt. Dabei zeigt sich, dass der Effekt auch von der Überlappungslänge  $L$  abhängig ist. Bei einer Untersuchung mit  $L = 60$  mm zeigt sich ein Anstieg der Versagenslast bei einer Fügeiteildicke von  $h \approx 4$  mm. Bei kurzer Überlappungslänge  $L = 20$  mm ergibt sich für alle betrachteten Fügeiteildicken ein nahezu linearer Zusammenhang. Eine mögliche Erklärung dieses Ergebnisses ergibt sich aus folgender Betrachtung: Die Exzentrizität der angreifenden Kräfte wächst mit steigender Fügeiteildicke.



**Abbildung 5.13:** Abhängigkeit der Versagenslast einer einschnittigen Klebverbindung von der äußeren Fügeteillänge  $L_{adh}$ . Ebenfalls dargestellt ist die Definition der minimalen Fügeteillänge  $L_{adh}^{min,2\%}$ . (Konfiguration:  $h = 4$  mm,  $L = 60$  mm,  $t = 0,3$  mm, Stahl-Epoxy)

Dementsprechend steigt auch die Biegemomentenbelastung des Überlappungsbereichs. Durch die steigende Biegesteifigkeit treten kleine Biegedeformationen auf. Für große Überlappungslängen sind diese beiden Effekte gleich groß und heben sich nahezu auf. Der Effekt der Fügeteildicke ist also auch vom Verhältnis der Fügeteildicke zur Überlappungslänge abhängig.

Die äußere Fügeteillänge kontrolliert die Biegemomentenbelastung des Überlappungsbereichs entscheidend. Eine Untersuchung dieses Einflusses mit dem vorliegenden Kriterium zeigt das in Abbildung 5.13 dargestellte Ergebnis. Je kürzer der nicht verklebte Teil der Fügeteile ist, umso geringer ist die Biegedeformation der Fügeteile und dementsprechend sinkt die Schälbelastung der Klebschicht. Mit steigender Länge des äußeren Fügeteils sinkt die Versagenslast. Ab einer bestimmten äußeren Fügeteillänge ändert sich die Biegemomentenbelastung nicht mehr und die Versagenslast ist von der äußeren Fügeteillänge unabhängig. Um die äußere Fügeteillänge zu bestimmen, die ausreichend ist, um den Einfluss der Fügeteillänge vernachlässigen zu können, wird die minimale Fügeteillänge  $L_{adh}^{min,2\%}$  eingeführt (vgl. Abbildung 5.13). Sie bezeichnet die Fügeteillänge, bei der sich die Versagenslast gegenüber der Asymptote  $L_{adh} \rightarrow \infty$  nur um 2% ändert. Die minimale Fügeteillänge zeigt eine Abhängigkeit von der Überlappungslänge  $L$  und der Fügeteildicke  $h$ . Das heißt im Umkehrschluss: Ist die äußere Fügeteillänge nicht ausreichend lang, kann der Effekt der Fügeteildicke oder Überlappungslänge nicht isoliert analysiert werden. Es muss bei experimentellen Parameterstudien eine ausreichende äußere Fügeteillänge gewählt werden, die über der minimalen Fügeteillänge liegt. Bei der Betrachtung des Einflusses der Elastizitätsmoduln von Fügeteil und Klebschicht ergibt sich, wie auch bei der Überlappungslänge und

Elastizitätsmodul [GPa]		Koeffizienten					
Fügeteil	Klebschicht	$a_1$ [-]	$a_2$ [mm]	$a_3$ [-]	$a_4$ [mm]	$a_5$ [-]	$a_6$ [mm]
70	1.8	7.13	9.73	0.19	1.29	-0.38	-5.06
	3.8	11.34	-62.78	0.31	-0.33	-0.38	-0.13
	4.8	11.49	-92.59	0.31	-1.53	-0.45	-3.48
210	1.8	6.66	6.89	0.13	1.06	-0.40	-8.07
	3.8	7.28	15.47	0.14	1.28	-0.54	-2.94
	4.8	8.12	-1.76	0.16	1.28	-0.51	0.66

**Tabelle 5.2:** Koeffizienten für die Näherungslösung (5.11) zur Bestimmung der minimalen Fügeteillänge  $L_{\text{adh}}^{\text{min},2\%}$ .

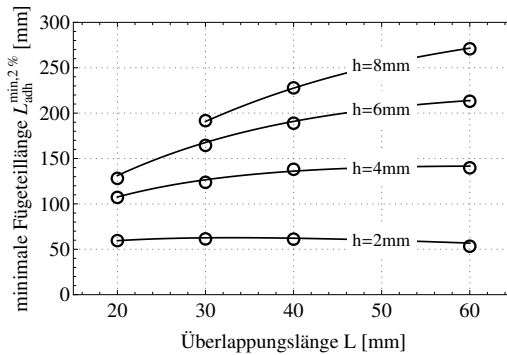
Fügeteildicke, das Ergebnis, dass die minimale Fügeteillänge mit der Steifigkeit des Überlappungsbereichs steigt.

Die minimale Fügeteillänge muss, wie in Abbildung 5.13 dargestellt, über die Auswertung mehrerer Analysen mit variiertem äußerer Fügeteillänge ermittelt werden. Um diese umfangreichen, rechenintensiven numerischen Auswertungen zur Bestimmung der minimalen Fügeteillänge zu ersetzen, wird folgende Näherungslösung vorgeschlagen:

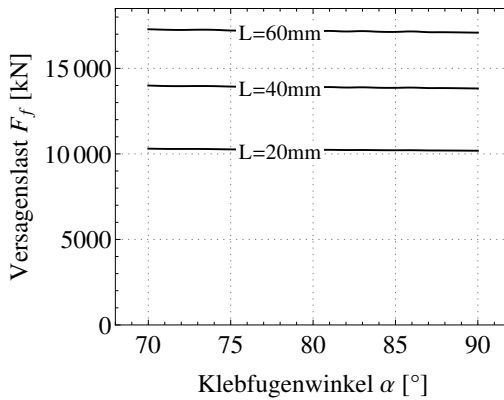
$$L_{\text{adh}}^{\text{min},2\%}(L, h) = (a_1 L + a_2) \tanh\left(\frac{h}{a_3 L + a_4}\right) + a_5 L + a_6, \quad (5.11)$$

die einer Approximation der numerischen Ergebnisse entspricht. Die entsprechenden sechs Koeffizienten  $a_1, \dots, a_6$  wurden für verschiedene Kombinationen der Elastizitätsmoduln von Fügeteil und Klebschicht bestimmt und sind in Tabelle 5.2 angegeben. Dabei wird der Bereich typischer Klebverbindungskonfigurationen umfasst.

In Abbildung 5.14 ist die Abhängigkeit der minimalen Fügeteillänge  $L_{\text{adh}}^{\text{min},2\%}$  von der Überlappungslänge  $L$  und der Fügeteildicke  $h$  dargestellt. Dabei kennzeichnen die Kreise die Ergebnisse der numerischen Auswertung und die durchgezogenen Linien die Auswertung der Näherungslösung (5.11). Man erkennt, dass die Näherungslösung eine sehr gute Approximation der numerisch ermittelten Ergebnisse darstellt. Bei der Festlegung der äußeren Fügeteillänge – zum Beispiel bei der Planung einer experimentellen Studie – kann nun direkt die explizite Näherungslösung für die minimale Fügeteillänge verwendet werden. Dabei muss die äußere Fügeteillänge so gewählt werden, dass sie für alle betrachteten Konfigurationen einer Parametervariation über der minimalen Fügeteillänge liegt. In allen Untersuchungen in dieser Arbeit wurde darauf geachtet, dass die äußere Fügeteillänge über der minimalen Fügeteillänge liegt.



**Abbildung 5.14:** Abhängigkeit der minimalen Fügeteillänge von der Überlappungslänge  $L$  und der Fügeteildicke  $h$ . (Die Kreise stellen die Ergebnisse numerischer Auswertungen dar und die durchgezogenen Linien die Auswertung der Näherungslösung (5.11).) (Konfiguration:  $t = 0,3\text{ mm}$ , Stahl-Epoxy)



**Abbildung 5.15:** Einfluss des Klebfugenwinkels  $\alpha$  auf die Versagenslast der einschnittigen Klebverbindung. (Konfiguration:  $h = 2\text{ mm}$ ,  $t = 0,3\text{ mm}$ , Stahl-Epoxy)

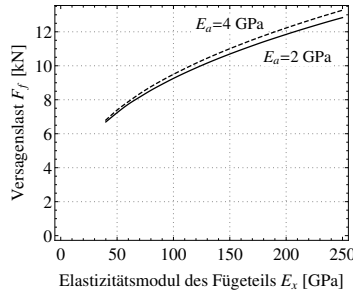
Nun soll der Einfluss des Klebfugenwinkels  $\alpha$  auf die Versagenslast betrachtet werden. Dabei wird für mehrere Konfigurationen eine Variation des Klebfugenwinkels von  $50^\circ$  bis  $90^\circ$  durchgeführt. Der Effekt des Klebfugenwinkels  $\alpha$  auf die Versagenslast ist in Abbildung 5.15 dargestellt. Die Versagenslast ist nahezu unabhängig vom Winkel der Klebfuge. Für kleinere Klebfugenwinkel ergeben sich geringfügig höhere Versagenslasten. Eine Untersuchung noch kleinerer Winkel wurde nicht durchgeführt, da dann nicht mehr davon ausgegangen werden kann, dass die obere einspringende Ecke von Füge­teil und Klebschicht Ausgangspunkt der Rissinitiierung ist. Die Spannungssingularität am zweiten Bi-Materialpunkt von Füge­teil und Klebschicht am Ende des Überlappungsbereichs wird dann ebenfalls ein möglicher Ausgangspunkt der Rissinitiierung. Der geringe Einfluss des Klebfugenwinkels kann mit der Auswertung des gekoppelten Kriteriums erklärt werden, das eine nicht-lokale Auswertung der Spannungen und Energiefreisetzungsraten vorsieht. Bei der in Abbildung 5.15 dargestellten Auswertung treten finite Risse mit einer Länge von rund 1,5 mm auf. In der Analyse von Moradi et al. (2013), in der mit einem linearen Modell finite Risse in Klebverbindungen untersucht wurden, zeigt sich ein mit dieser Analyse übereinstimmender, nahezu verschwindender Effekt des Klebfugenwinkels. Bei spröden Klebverbindungen hat also eine schräge Ausführung der Klebfuge nur einen geringen Einfluss auf die Versagenslast.

Die Versagenslast einer Klebverbindung hängt nicht nur von den zuvor diskutierten geometrischen Parametern, sondern auch vom elastischen Verhalten der Fügeteile und der Klebschicht ab. Während eine Analyse zeigt, dass die Querkontraktionszahlen nur geringen Einfluss auf die Versagenslast haben, haben die Elastizitätsmoduln von Füge­teil  $E_x$  und Klebschicht  $E_a$  einen deutlichen Einfluss auf die Versagenslast. Insbesondere der Einfluss des Elastizitätsmoduls der Fügeteile ist sehr ausgeprägt. Wie in Abbildung 5.16 dargestellt, zeigt sich ein Ansteigen der Rissinitiierungs­last mit zunehmendem Elastizitätsmodul des Fügeteils. Die dargestellte Variation des Elastizitätsmoduls der Klebschicht zeigt den gleichen Effekt, wenngleich mit deutlich geringerem Einfluss.

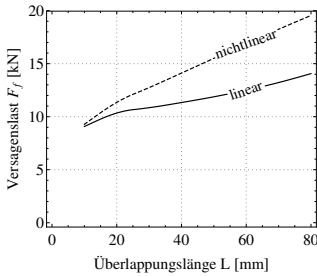
### 5.8.2 Einfluss der nichtlinearen Biegedeformation der Fügeteile

Nun soll der Einfluss der nichtlinearen Biegedeformationen der Fügeteile auf die Berechnung der Rissinitiierungs­last untersucht werden. Durch die großen Biegedeformationen der Fügeteile reduziert sich die Biegemomentenbelastung am Rand der Klebschicht. Dementsprechend sinken die Spannungen bei Berücksichtigung des nichtlinearen Effektes. Eine Auswertung geometrisch-linearer Finite-Elemente-Rechnungen ergibt geringere Versagenslasten. Wie groß der Effekt der geometrischen Nichtlinearität ist, hängt wiederum von den geometrischen Parametern ab. In Abbildung 5.17 ist der Vergleich der geometrisch-linearen und geometrisch-nichtlinearen Betrachtung dargestellt. Abbildung 5.17(a) zeigt den Einfluss der Überlappungslänge  $L$  auf diesen Vergleich. Bei kurzen Überlappungslängen dominiert die Schubbelastung das Versagensverhalten und die Veränderung der

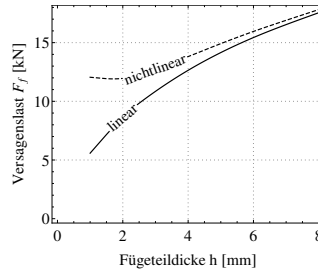




**Abbildung 5.16:** Einfluss der Elastizitätsmoduln von Füge­teil  $E_x$  und Klebschicht  $E_a$  auf die Versagenslast einer einschnittigen Überlappungsfügung. (Konfiguration:  $h = 2 \text{ mm}$ ,  $L = 30 \text{ mm}$ ,  $t = 0,2 \text{ mm}$ , Stahl-Epoxy)



(a) Einfluss der Überlappungslänge  
(Konfiguration mit  $h = 3 \text{ mm}$ )



(b) Einfluss der Füge­teildicke (Konfiguration mit  $L = 30 \text{ mm}$ )

**Abbildung 5.17:** Vergleich der Versagenslastvorhersagen bei geometrisch-linearen und geometrisch-nichtlinearen Finite-Elemente-Rechnungen.

Biegemomente durch die geometrisch-nichtlineare Analyse führt nicht zu erhöhten Versagenslasten. Mit zunehmender Überlappungslänge ist die Versagenslast des nichtlinearen Modells deutlich größer als die des linearen Modells, da die Schälspannungen infolge der Biegebelastung nichtlinear von der Belastung abhängen. Der Einfluss der Füge­teildicke (Abbildung 5.17(b)) zeigt einen übereinstimmenden Trend. Bei dünnen Füge­teilen spielt die Biegedeformation der Füge­teile einen großen Einfluss und ein großer Unterschied zwischen der linearen und der nichtlinearen Betrachtung liegt vor. Bei großen Füge­teildicken sind die Füge­teile sehr biegesteif und der Unterschied der beiden Analysen reduziert sich. Der Unterschied zwischen einer linearen und einer geometrisch nichtlinearen Betrachtung liegt für dünne Füge­teile bei über 100%. Eine Betrachtung des nichtlinearen Effektes der Füge­teildeformationen ist also sehr wichtig für eine genaue Analyse.

## 5.9 Untersuchung der verschiedenen Formulierungen des gekoppelten Kriteriums

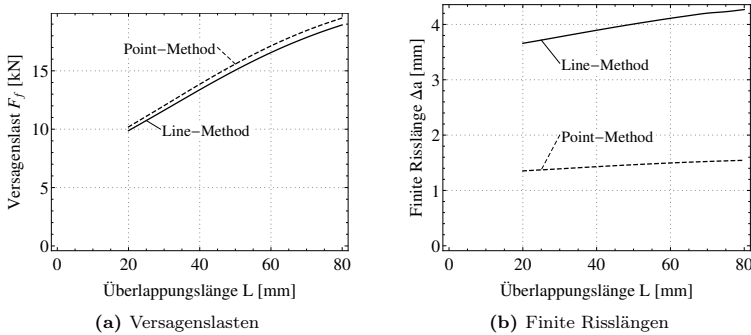
Wie in Kapitel 2.4 beschrieben gibt es zwei mögliche Varianten der Formulierung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums: Zum einen eine punktweise Auswertung des Spanningskriteriums, in dem eine Erfüllung des Festigkeitskriteriums in jedem Punkt des betrachteten finiten Risses gefordert ist (Gleichung (2.72)). Diese Methode wird auch als *Point-Method* bezeichnet. Zum anderen eine gemittelte Auswertung des Spanningskriteriums, bei der die über die Risslänge gemittelte Spannung die Festigkeit überschreiten muss (Gleichung (2.73)). Diese Methode wird als *Line-Method* bezeichnet.

Nun soll ein Vergleich dieser beiden Möglichkeiten das gekoppelte Kriterium zu formulieren anhand des vorliegenden Modells vorgenommen werden. Die zuvor geschilderte Vorgehensweise kann nahezu vollständig übernommen werden. Der Aufbau des Finite-Elemente-Modells und die Auswertung der Spannung und der Energiefreisetzungsrate bleibt unverändert. Vor dem Lösen des Spanningskriteriums erfolgt eine Berechnung der gemittelten Spannungsfunktion  $\bar{f}(\sigma_{ij})$ , die direkt aus der Kenntnis der Spannungsfunktion bestimmt werden kann:

$$\bar{f}(\sigma_{ij})(\Delta a) = \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} f(\sigma_{ij})(\tilde{r}) d\tilde{r}. \quad (5.12)$$

Da die Finite-Elemente-Analyse nur die Spannungen an diskreten Punkten angibt, muss das Integral numerisch ausgewertet werden. Mit der Bereitstellung der gemittelten Spannung kann das Optimierungsproblem mit der bisherigen algorithmischen Umsetzung gelöst werden; somit muss die Implementierung nicht angepasst werden. Die nötige Voraussetzung monoton abklingender Spannungsfunktionen ist im Bereich der betrachteten Risslängen gegeben.

In Abbildung 5.18 ist ein Vergleich der Umsetzung der bisher benutzten Point-Method mit der Line-Method dargestellt. Dabei wird als repräsentatives Beispiel eine Variation der Überlappungslänge betrachtet. Die Versagenslastvorhersagen (Abbildung 5.18(a)) beider Umsetzungen des Spannungsteilkriteriums zeigen keine große Abweichung. Die größte Abweichung liegt bei 3,6%. Ein deutlicher Unterschied ergibt sich bei der Betrachtung der vorhergesagten finiten Risslängen (Abbildung 5.18(b)). Die Risslängen sind bei einem Spannungsteilkriterium mit einer Betrachtung der gemittelten Spannungen (Line-Method) mehr als doppelt so gross, wie bei der Betrachtung der ungemittelten Spannungen in jedem Punkt auf dem finiten Riss (Point-Method). Aufgrund der geringen Steigung der Energiefreisetzungsrate für hinreichend große finite Risslängen, ergibt sich aus dem großen Unterschied der Risslängen kein großer Unterschied der Versagenslasten. Allgemein gilt für alle Umsetzungen des gekoppelten Kriteriums: Die Line-Method wird immer längere finite Risse mit niedrigeren Rissinitiierungslasten ergeben als die Point-Method. Die Ergebnisse zeigen jedoch, dass sich im vorliegenden



**Abbildung 5.18:** Vergleich zweier Formulierungen des gekoppelten Kriteriums: Die Auswertung der Spannungen an einem Punkt (Gleichung (2.72)) (Point-Method) und die Auswertung der gemittelten Spannung (Gleichung (2.73)) (Line-Method). (Konfiguration:  $h = 3$  mm,  $L = 30$  mm,  $t = 0,3$  mm, Stahl-Epoxy)

Fall einer einschnittigen Überlappungsfügung die Ergebnisse keine großen Abweichungen ergeben. Eine Umsetzung der Point-Method ist jedoch aus numerischer Sicht sinnvoll. Denn da sich dabei kürzere finite Risslängen ergeben, kann der fein vernetzte Bereich um die einspringende Ecke von Fügeteil und Klebschicht kleiner gewählt werden. Dies führt zu geringeren Rechenzeiten bei Verwendung der Point-Method.

## 5.10 Anmerkungen und Ausblick

### 5.10.1 Erweiterung auf verklebte Faserkunststoffverbunde

Für eine Erweiterung des vorliegenden Berechnungsverfahrens auf verklebte Faserkunststoffverbunde genügt es nicht, das entsprechende Materialverhalten der Fügeteile in den Finite-Elemente-Analysen vorzusehen. Wie in Kapitel 3.2 dargestellt, müssen bei der Analyse von Verklebungen von Laminaten mehrere mögliche Risskonfigurationen berücksichtigt werden. Am Rand des Überlappungsbereichs wirkt auf das Laminat eine erhebliche Schälbelastung, welche die interlaminare Festigkeit von Laminaten überschreiten kann. In diesem Fall muss die Menge der betrachteten Risskonfigurationen um mögliche Delaminationsrisse sowie um Risse von der Klebschicht in das Laminat erweitert werden. Des Weiteren muss in der Auswertung des gekoppelten Kriteriums die gleichzeitige Initiierung mehrerer Risskonfigurationen berücksichtigt werden. Eine solche Analyse scheint möglich, ist aber zugleich auch mit hohem Rechenaufwand verbunden. Weiß man jedoch,

zum Beispiel aufgrund von experimentellen Befunden, dass bei verklebten Faserkunststoffverbunden nur mit Rissen innerhalb der Klebschicht zu rechnen ist, kann das vorliegende Berechnungsmodell – unter Berücksichtigung des anisotropen Materialverhaltens – direkt benutzt werden.

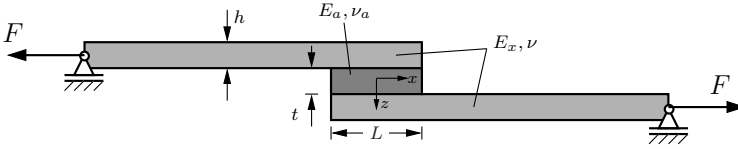
## Kapitel 6

# Analyse von Rissinitiierung in Klebverbindungen mittels geschlossen-analytischer Lösungen

*Das spröde Versagen von Klebverbindungen durch Rissinitiierung in der Klebschicht wird mit dem gekoppelten Spannungs-Energie-Kriterium untersucht. Zur Abbildung des mechanischen Verhaltens der Klebverbindung werden in diesem Kapitel klassische, geschlossen-analytische Lösungen für einschnittige Überlappungsfügungen verwendet. Aufbauend auf der Spannungslösung wird jeweils die Energiefreisetzungsrate finiter Risse berechnet und für die Auswertung des Energieteilkriteriums verwendet. Es ergeben sich hocheffiziente Umsetzungen des gekoppelten Kriteriums zur Berechnung der Rissinitiierungslasten von einschnittigen Klebverbindungen. Die Ergebnisse dieser Modelle werden mit den Ergebnissen der Umsetzung mittels des numerischen Modells des vorangegangenen Kapitels und mit Experimenten verglichen. Es zeigt sich, dass mit der Ojalvo-Eidinoff-Lösung eine gute bis sehr gute Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen erzielt wird. Für den vorliegenden Fall einer Mixed-Mode-Belastung wird eine neue Sprödigkeitszahl vorgeschlagen und für die Quantifizierung der vorausgesetzten hinreichenden Sprödigkeit verwendet. Ergebnisse dieser Analyse wurden publiziert (Weißgraber u. Becker, 2011a,b,c, 2013).*

### 6.1 Einführung

Die Ergebnisse der Umsetzung des gekoppelten Kriterium mittels eines numerischen Modells im vorangegangenen Kapitel zeigen, dass dieses Kriterium sinnvoll für die Beschreibung der Rissinitiierung in spröden Klebverbindungen verwendet werden kann. Allerdings ist eine Analyse der Rissinitiierung und die entsprechende Ermittlung der Rissinitiierungslast mit erheblichem Rechenaufwand verbunden. Für viele praktische Anwendungen sind effiziente Berechnungsverfahren notwendig. So muss etwa bei einer Strukturoptimierung oder Parameterstudie der Einfluss einzelner Parameter mit geringem Aufwand untersucht werden können. Daher werden in diesem Kapitel geschlossen-analytische Modelle von Klebverbindungen eingesetzt, die um ein Vielfaches schneller ausgewertet werden können als ein numerisches Modell.



**Abbildung 6.1:** Betrachtete Konfiguration einer einschnittigen Überlappungsfügung.

## 6.2 Modellierung der Klebverbindung

Wie im vorangegangenen Kapitel wird eine symmetrische Überlappungsfügung betrachtet. Abbildung 6.1 zeigt die betrachtete Konfiguration der Klebverbindung mit Tiefe  $b$ , Überlappungslänge  $L$ , Fügeiteildicke  $h$  und Klebschichtdicke  $t$ . Der Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl der Fügeiteile und der Klebschicht sind  $E_x, \nu$  bzw.  $E_a, \nu_a$ . Es erfolgt ausschließlich eine Betrachtung rechtwinkliger Klebfugen. Wie in Kapitel 3.2 dargestellt und auch im vorangegangenen Kapitel gezeigt, führt eine Verringerung des Winkels allenfalls zu höheren Versagenslasten. Daher ist eine Reduktion auf rechtwinkliger Klebfugen eine konservative Einschränkung.

Wie in Kapitel 3.3 dargestellt gibt es eine Vielzahl von Modellen unterschiedlicher Komplexität für die Berechnung der Spannungsverteilung in einschnittigen Klebfügungen. In diesem Kapitel werden drei klassische Lösungen für die Spannungen in einer einschnittigen Überlappungsfügung verwendet: die Volkersen-Lösung, die Goland-Reissner-Lösung und die Ojalvo-Eidinoff-Lösung. Diese zeichnen sich durch eine sehr stark vereinfachte Betrachtung der Klebverbindung mit entsprechend geringer Komplexität aus. Während die Volkersen-Lösung nur die Schubspannungen in der Klebschicht enthält, werden in den beiden Letzteren die Schub- und die Schälspannung in der Klebschicht betrachtet. In diesen beiden Lösungen wird auch der nichtlineare Effekt der Fügeiteildeformation über die Verwendung eines Momentenfaktors berücksichtigt. Diese geschlossen-analytischen Lösungen wurden detailliert und in einer einheitlichen Nomenklatur in Kapitel 3.3.1 dargestellt. Alle diese Lösungen sind sogenannte *weak-Interface*-Lösungen, welche die Klebschicht mit verschmierten Federn abbilden. Im Folgenden wird wieder der Index  $V$  für die Volkersen-Lösung, GR für die Goland-Reissner und OE für die Ojalvo-Eidinoff-Lösung verwendet. Die Lösungen für die Spannungen in der Klebschicht der jeweiligen Modelle sind von folgendem Typ:

Volkersen-Lösung:

$$\tau^{(V)} = C \cosh cx \quad \text{siehe (3.11)}$$

Goland-Reissner-Lösung:

$$\tau^{(\text{GR})} = C_1 \cosh(cx) + C_2 \quad \text{siehe (3.29)}$$

$$\sigma^{(\text{GR})} = C_1 \sinh(cx) \sin(cx) + C_2 \cosh(cx) \cos(cx) \quad \text{siehe (3.31)}$$

Ojalvo-Eidinoff-Lösung:

$$\tau^{(\text{OE})} = C_1 \cosh(cx) + C_2 \quad \text{siehe (3.48)}$$

$$\sigma_0^{(\text{OE})} = C_1 \sinh(c_1 x) \sin(c_2 x) + C_2 \cosh(c_1 x) \cos(c_2 x) \quad \text{siehe (3.49)}$$

$$\tau_{1,2}^{(\text{OE})} = \tau_0^{(\text{OE})} \mp C \frac{d\sigma_0^{(\text{OE})}}{dx} \quad \text{siehe (3.49)}$$

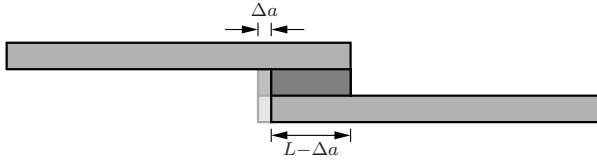
Alle Spannungslösungen ergeben sich also aus Hyperbelfunktionen und trigonometrischen Funktionen mit einer dementsprechend schnellen Auswertung. Wie in Kapitel 3.3 dargestellt sind die Spannungen der Goland-Reissner-Lösung und der Ojalvo-Eidinoff-Lösung nicht linear von der Belastung  $F$  abhängig, da der nichtlineare Effekt der großen Biegedeformation der Fügeteile über den Momentenfaktor (3.13) berücksichtigt wird.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass sich die Randbedingungen dieser Analyse mit geschlossen-analytischen Modellen von der numerischen Umsetzung leicht unterscheiden, siehe Abbildung 6.1. In der numerischen Analyse können die Randbedingungen frei gewählt werden und sind so gewählt, dass sie der tatsächlichen Belastung in Experimenten möglichst genau entsprechen. Bei den klassischen geschlossen-analytischen Modellen sind allerdings abweichende Randbedingungen, die keine momentenfeste Lagerung an den Enden der Fügeteile vorsehen, umgesetzt. Wenn allerdings hinreichend lange Fügeteile betrachtet werden, verschwindet der Einfluss der Randbedingungen auf die Belastung des Überlappungsbereichs (Guo et al., 2006).

Wie in Kapitel 3.3 ausgeführt, stellen die Ergebnisse der geschlossen-analytischen *weak-interface*-Lösungen nur Näherungslösungen des tatsächlichen zweidimensionalen Spannungszustands in der Klebschicht dar. Die Spannungssingularitäten an den einspringenden Ecken an den Enden des Überlappungsbereichs werden nicht abgebildet. Stattdessen nimmt die Normalspannung hier einen zwar stark erhöhten, jedoch endlichen Wert an. Die Schubspannungen zeigen ebenfalls eine Spannungsspitze am Ende des Überlappungsbereichs. Detaillierte numerische Analysen zeigen (z. B. Kapitel 4) jedoch eine Spannungsspitze in unmittelbarer Nähe zum Rand und ein Verschwinden der Schubspannung direkt am freien Rand der Klebschicht.

## 6.3 Ermittlung der Energiefreisetzungsrate

Für die Lösung des gekoppelten Kriteriums im Rahmen der Bruchmechanik finiter Risse muss neben der Spannungslösung auch die Energiefreisetzungsrate



**Abbildung 6.2:** Modellierung der Rissinitiierung bei der Verwendung der geschlossen-analytischen Lösungen.

möglicher Risskonfigurationen zur Verfügung stehen. Dazu wird aufbauend auf den geschlossen-analytischen Lösungen die Energiefreisetzungsrate von finiten Rissen in der Klebschicht berechnet. Um die geschlossenen Lösungen für die Berechnung der Energiefreisetzungsrate zu verwenden, wird ein Risswachstum mit einer Verkürzung des Überlappungsbereichs gleichgesetzt, siehe Abbildung 6.2. Es werden also nur Risse ausgehend von einer einspringenden Ecke von Klebschicht und Füge teil betrachtet und der Einfluss des Strukturbereiches unter dem Riss vernachlässigt. Dies stellt die typische Vorgehensweise zur Ermittlung von differentiellen Energiefreisetzungsrate mit *weak-interface*-Lösungen dar (Krenk, 1992, Hu et al., 1992, Fraisse u. Schmit, 1993, Hu, 1995). Diese Vorgehensweise und deren Einfluss auf die Genauigkeit der Energiefreisetzungsrate wird im Folgenden an Hand eines numerischen Modells untersucht. Verwendet man diese Form der Abbildung von Risswachstum, ergibt sich der allgemeine Zusammenhang, dass die differentielle Energiefreisetzungsrate der Formänderungsenergiegedichte am Ende der Überlappungslänge multipliziert mit der Dicke der Klebschicht entspricht (Lenci, 2001):

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} \frac{t}{G_a} \tau_{0,\max}^2 + \frac{1}{2} \frac{t}{E_a} \sigma_{0,\max}^2. \quad (6.1)$$

Dabei kennzeichnet der Index  $\max$  die maximale Spannung die am Ende des Überlappungsbereichs auftritt. Diese ist von der Überlappungslänge abhängig. Da, wie zuvor diskutiert, in *weak-interface*-Lösungen die Spannungen am Rand der Klebschicht endliche, von null verschiedene Werte annehmen, ist die differentielle Energiefreisetzungsrate (6.1) ungleich null. Dies ist ebenfalls eine typische Eigenschaft von *weak-interface*-Lösungen. So wie die Spannungssingularität in der Spannungslösung nicht abgebildet werden kann, wird das Verschwinden der Energiefreisetzungsrate bei schwachen Singularitäten ebenfalls nicht korrekt abgebildet.

Die Bestimmung der inkrementellen Energiefreisetzungsrate erfolgt durch Integration über den finiten Riss nach Gleichung (2.68). Mit den Annahmen zur Abbildung der Rissinitiierung in den vorliegenden *weak-interface*-Lösungen ergibt sich, dass eine Integration über die Risslänge der umgekehrten Integration über die Überlappungslänge entspricht ( $da = -dL$ ). Damit ist der Zusammenhang der differentiellen



### 6.3 Ermittlung der Energiefreisetzungsrates

und der inkrementellen Energiefreisetzungsrates der folgende:

$$\bar{\mathcal{G}} = \frac{1}{\Delta a} \int_{L-\Delta a}^L \mathcal{G}(\tilde{L}) d\tilde{L}. \quad (6.2)$$

Krenk (1992) und Carpinteri et al. (2009) zeigen den Zusammenhang der differentiellen Energiefreisetzungsrates mit den maximalen Spannungen am Ende der Klebschicht durch die Berechnung des Risschließintegrals. Diese Vorgehensweise erlaubt die Auswertung der Energiefreisetzungsrates allein durch Kenntnis der Spannungslösung. Eine Berechnung der inneren Energie vor und nach Risswachstum zur Auswertung der freigesetzten Energie kann umgangen werden. Letztere Überlegung ist äquivalent zu einer Auswertung der Differenz der Nachgiebigkeit  $H$  der Struktur vor und nach dem Risswachstum:

$$\bar{\mathcal{G}} = \frac{1}{2} \frac{\Delta H}{\Delta ab} F^2 = \frac{1}{2} \frac{(H^{(\text{gerissen})} - H^{(\text{ungerissen})})}{\Delta ab} F^2. \quad (6.3)$$

Für den Fall des Volkersen-Modells lässt sich diese anschauliche Vorgehensweise noch leicht durchführen. Die Nachgiebigkeit des Überlappungsbereichs der Länge  $L$  setzt sich im Volkersen-Modell nur aus der Dehnung der Fügeteile und der Schubnachgiebigkeit der Klebschicht multipliziert mit ihrer Dicke zusammen:

$$H^{(\text{ungerissen})}(\text{V}) = t \frac{\tau_{\max}^{(\text{V})}(L)}{G_a F} + \frac{L}{2E_x h b}. \quad (6.4)$$

Betrachtet man einen Riss der Länge  $\Delta a$ , so ergibt sich die Nachgiebigkeit zu

$$H^{(\text{gerissen})}(\text{V}) = t \frac{\tau_{\max}^{(\text{V})}(L - \Delta a)}{G_a F} + \frac{L - \Delta a}{2E_x h b} + \frac{\Delta a}{E_x h b}. \quad (6.5)$$

Dabei ist  $\tau_{\max}^{(\text{V})}$  die maximale Schubspannung am Rand, die von der Länge des (verklebten) Überlappungsbereichs abhängt.

Aus Gleichung (6.3) ergibt sich die Energiefreisetzungsrates für das Volkersen-Modell zu

$$\bar{\mathcal{G}}^{(\text{V})} = \frac{F^2}{4E_x h b^2} \left( 1 + \frac{2}{\omega \Delta a} \left( \coth \frac{\omega(L - \Delta a)}{2} - \coth \frac{\omega L}{2} \right) \right). \quad (6.6)$$

Das gleiche Ergebnis erhält man, wenn man die differentielle Energiefreisetzungsrates für *weak-interface*-Modelle (6.1) auswertet und die Integration nach (6.2) ausführt.

Die Bestimmung der Energiefreisetzungsrates des Goland-Reissner-Modells kann ebenfalls über die Auswertung der Nachgiebigkeit der Klebverbindung (Krenk, 1992) erfolgen, allerdings muss dann die Nachgiebigkeit in Folge der Biegedeformation

und deren Änderung bei Rissfortschritt berücksichtigt werden. Direkter ergibt sich das Ergebnis durch Auswertung der Spannungen am Ende der Klebschicht (6.1) und Integration nach Gleichung (6.2):

$$\begin{aligned}\bar{G}^{(\text{GR})} &= \int_{L-\Delta a}^L \left( \frac{1}{2} \frac{t}{G_a} \left( \tau_{0,\max}(\tilde{L}) \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{t}{E_a} \left( \sigma_{0,\max}(\tilde{L}) \right)^2 \right) d\tilde{L} \\ &= \frac{F^2}{4E_x h b^2} \frac{1}{a} \left[ (1+6k)a + \frac{2(1+3k)}{\lambda_\tau} \left( \coth \left( \lambda_\tau \frac{L-a}{2} \right) - \coth \left( \lambda_\tau \frac{L}{2} \right) \right) \right. \\ &\quad + \frac{6(1-k)}{\lambda_\tau^2} \frac{a}{L(L-a)} + \\ &\quad \left. + \frac{6k}{\lambda_\sigma} \left( \frac{\cosh(\lambda_\sigma(L-a)) - \cos(\lambda_\sigma(L-a))}{\sinh(\lambda_\sigma(L-a)) + \sin(\lambda_\sigma(L-a))} - \frac{\cosh(\lambda_\sigma L) - \cos(\lambda_\sigma L)}{\sinh(\lambda_\sigma L) + \sin(\lambda_\sigma L)} \right) \right].\end{aligned}\quad (6.7)$$

Im Falle der Ojalvo-Eidinoff-Lösung muss die lineare Variation der Schubspannungen über die Klebschichtdicke bei der Bestimmung der Energiefreisetzungsrate betrachtet werden. Mit Integration der Schubspannung über die Klebschichtdicke ergibt sich folgender Ausdruck:

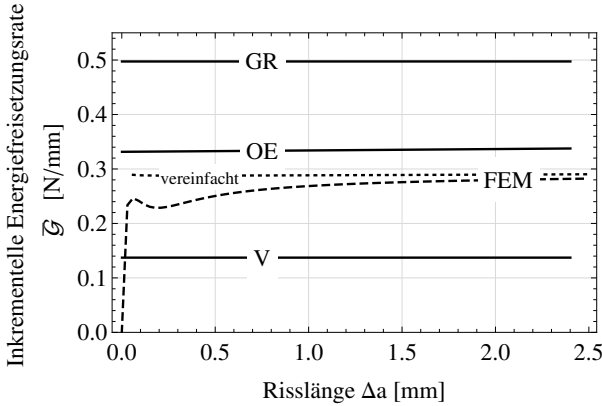
$$\mathcal{G}^{(\text{OE})} = \frac{t}{2G_a} \left( \left( \tau_{0,\max}(\tilde{L}) \right)^2 + \left( \frac{G_a t^2}{12E_a} \frac{\partial \sigma_0^{(\text{OE})}}{\partial x} \bigg|_{x=-\frac{L}{2}} \right)^2 \right) + \frac{t}{2E_a} \left( \sigma_{0,\max}(\tilde{L}) \right)^2. \quad (6.9)$$

Eine geschlossen-analytische Auswertung der inkrementellen Energiefreisetzungsrate ist allerdings nicht möglich, da hier keine Lösung für das Integral (6.2) gefunden werden konnte. Das Integral zur Bestimmung der inkrementellen Energiefreisetzungsrate des Ojalvo-Eidinoff-Modells

$$\begin{aligned}\bar{G}^{(\text{OE})} &= \int_{L-\Delta a}^L \left( \frac{1}{2} \frac{t}{G_a} \left( \tau_{0,\max}(\tilde{L}) \right)^2 + \left( \frac{G_a}{E_a} \cdot \frac{\partial \sigma_0^{(\text{OE})}}{\partial x} \bigg|_{x=-\tilde{L}/2} \right)^2 \frac{t^2}{12} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{t}{E_a} \left( \sigma_{0,\max}(\tilde{L}) \right)^2 d\tilde{L}\end{aligned}\quad (6.10)$$

muss dementsprechend mit numerischer Integration ausgewertet werden.

In Abbildung 6.3 ist die Energiefreisetzungsrate der drei betrachteten Modelle dargestellt. Zum Vergleich ist das Ergebnis des nichtlinearen Finite-Elemente-Modells aus dem vorangegangenen Kapitel ebenfalls dargestellt. Man erkennt, dass die Energiefreisetzungsrate der geschlossenen Lösungen nur eine geringe Abhängigkeit von der Risslänge zeigen, diese jedoch streng monoton ist. Wie zuvor ausgeführt, ist die Energiefreisetzungsrate für verschwindend kleine Risslängen



**Abbildung 6.3:** Inkrementelle Energiefreisetzungsrate in Abhängigkeit der Risslänge und der Klebschichtdicke. Ergebnisse der drei geschlossen-analytischen Modellierungen und der Ergebnisse des Finite-Elemente-Modells. Gepunktet dargestellt sind die Ergebnisse der Finite-Elemente-Analyse der vereinfachten Modellierung der Rissbildung (siehe Abbildung 6.2). (Stahl-Epoxy-Fügung,  $F = 12 \text{ kN}$ ;  $L = 50 \text{ mm}$ ;  $h = 2 \text{ mm}$ ;  $t = 0,2 \text{ mm}$ )

nicht null. In der betrachteten Klebverbindungskonfiguration zeigt das Ojalvo-Eidinoff-Modell die geringste Abweichung zur Finite-Elemente-Lösung, die – da auskonvergiert – als Referenzlösung betrachtet werden kann.

Mit zusätzlichen Finite-Elemente-Analysen wurde untersucht, welchen Einfluss die vereinfachende Annahme der Rissinitiierung auf die Ergebnisse der geschlossen-analytischen Modelle hat.<sup>53</sup> Die der Abbildung der Rissinitiierung im geschlossen-analytischen Modell zugrundeliegende Annahme der Verkürzung der Klebschicht (Abbildung 6.2) wurde dazu in einem numerischen Modell umgesetzt. Statt der vollständigen Abbildung eines Risses als Bereich doppelter Knoten wurde der Überlappungsbereich um die entsprechende Risslänge verkürzt. Dazu wurde die im vorigen Kapitel verwendete Finite-Elemente-Routine derart geändert, dass für die Auswertung der Energiefreisetzungsrate für den ungerissenen und den gerissenen Zustand der gleiche Modellaufbau mit modifizierter Überlappungslänge und Füge-teillänge verwendet wurde. Ein Ergebnis dieser Vorgehensweise ist ebenfalls in Abbildung 6.3 dargestellt und als „FEM – vereinfacht“ gekennzeichnet. Diese Energiefreisetzungsrate steigt ebenfalls mit der Risslänge nur leicht an und zeigt auch keine nicht-monotone Charakteristik. Aufgrund der Abbildung eines selbstähnlichen Risswachstums verschwindet die Energiefreisetzungsrate für kleine Risslängen,

<sup>53</sup>Diese Analyse war Bestandteil der Bachelorarbeiten von Barfusz (2013) und Kraft (2014).

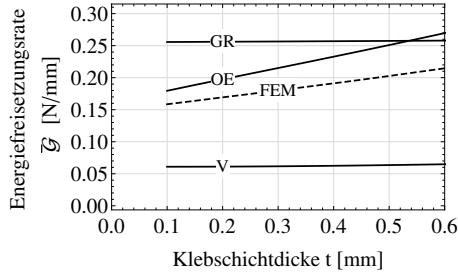
wie auch bei den *weak-interface*-Lösungen, nicht. Mit zunehmender Risslänge wird der Unterschied zwischen der vollständigen und vereinfachten Rissmodellierung immer kleiner.

Abbildung 6.4 zeigt den Vergleich der Energiefreisetzungsraten der geschlossen-analytischen Modelle bei festgehaltener Risslänge und variiert Geometrie (Klebschichtdicke  $t$ , Überlappungslänge  $L$  und Fügeteildicke  $h$ ). Auch hier sind ebenfalls die Ergebnisse der nichtlinearen Finite-Elemente-Lösung für Risse entlang der Grenzschicht ( $\varphi = 0$ ) als Referenz dargestellt. Während die Volkersen-Lösung wegen der Vernachlässigung der Schälspannungen immer relativ kleine Energiefreisetzungsraten ergibt, die unter der Referenzlösung liegen, sind die Energiefreisetzungsraten mit der Goland-Reissner- und der Ojalvo-Eidinoff-Lösung stets größer als die Finite-Elemente-Lösung. Die Ojalvo-Eidinoff-Lösung liefert meist die beste Approximation der Energiefreisetzungsrate, lediglich für kurze Überlappungslängen und dicke Klebschichtdicken liegt die Goland-Reissner-Lösung näher an der Finite-Elemente-Referenzlösung. Man kann jedoch erkennen, dass die Effekte der drei betrachteten Geometrieparameter am besten von der Ojalvo-Eidinoff-Lösung abgebildet werden. Die Abweichung der Ojalvo-Eidinoff-Lösung von der Referenzlösung liegt bei der betrachteten Variation der Klebschichtdicke und der Fügeteildicke im Mittel bei 25%. Bei der für die Variation der Überlappungslänge betrachteten Konfiguration ergeben sich Abweichungen von etwa 50%.

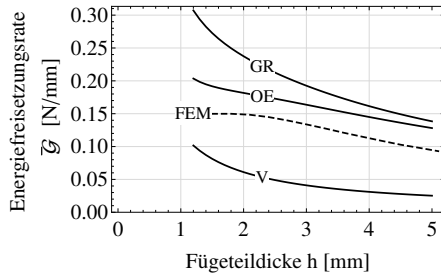
Da die Energiefreisetzungsrate jedoch – abgesehen vom Effekt der nichtlinearen Deformation der Fügeteile – quadratisch von der Belastung abhängt, ist bei einer Auswertung des gekoppelten Kriteriums mit einer Abweichung zu rechnen, die deutlich kleiner ist als die Abweichung der Energiefreisetzungsrate. Es ist eine Abweichung der Versagenslast in der Größenordnung der Quadratwurzel der Abweichung der Energiefreisetzungsrate zu erwarten. Jedoch ist die Lösung auch bei einem linearen Modell nicht exakt, da die Rissinitiierungslast und die finite Risslänge von der gesamten Lösung des gekoppelten Kriteriums abhängen. Die Quadratwurzel der Abweichung der betrachteten Konfigurationen liegt bei 10% für die Klebschichtdicke, bei 13% für die Fügeteildicke und bei 22% für die Variation der Überlappungslänge.

In Abbildung 6.5 ist die Energiefreisetzungsrate des Ojalvo-Eidinoff-Modells in Abhängigkeit der Risslänge für verschiedene Klebschichtdicken gegeben. Die Energiefreisetzungsrate steigt mit wachsender Klebschichtdicke und zeigte eine zunehmende Steigung. Wie in Abbildung 6.4(a) zu erkennen, bildet nur das Ojalvo-Eidinoff-Modell das Ansteigen der Energiefreisetzungsrate mit zunehmender Klebschichtdicke hinreichend ab. Dabei zeigt sich eine leichte Überschätzung dieses Effektes und die Abweichung nimmt zu. Die Quadratwurzel der Abweichung steigt von 6% auf 13%.

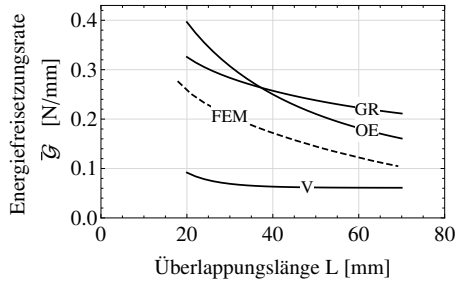
### 6.3 Ermittlung der Energiefreisetzungsrates



(a)  $L = 40$  mm,  $h = 2$  mm

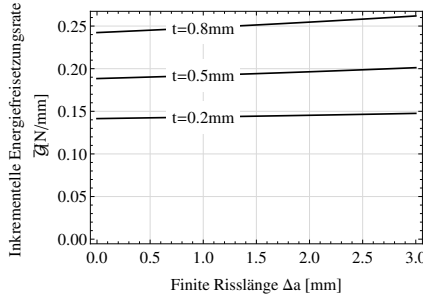


(b)  $L = 50$  mm,  $t = 0,3$  mm



(c)  $h = 2$  mm,  $t = 0,5$  mm

**Abbildung 6.4:** Vergleich der Energiefreisetzungsrates der drei Modellierungsansätze und der Finite-Elemente-Analyse in Abhängigkeit der geometrischen Parameter der Klebverbindung. Auswertung bei einer Belastung von  $F = 5$  kN und für Risslänge  $\Delta a = 1,5$  mm. (Stahl-Epoxy-Fügung)



**Abbildung 6.5:** Inkrementelle Energiefreisetzungsrate in Abhängigkeit der Risslänge und der Klebschichtdicke. Dargestellt sind die Ergebnisse des Ojalvo-Eidinoff-Modells. (Stahl-Epoxy-Fügung,  $F = 5 \text{ kN}$ ;  $h = 2 \text{ mm}$ ;  $L = 15 \text{ mm}$ )

## 6.4 Umsetzung des gekoppelten Kriteriums

Wenn die Spannungen und die Energiefreisetzungsrate zur Verfügung stehen, kann eine Auswertung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums erfolgen.

Bei der Betrachtung von Rissinitiierung wird – wie bisher – das Hauptnormalspannungskriterium als Spannungsteilkriterium verwendet. In den jeweiligen *weak-interface*-Lösungen ist der Spannungszustand vereinfacht erfasst. Somit reduziert sich das Spannungsteilkriterium im Falle der Volkersen-Lösung zu

$$f(\sigma_{ij})^{(V)} = \tau_1^{(V)} \geq \sigma_c \quad (6.11)$$

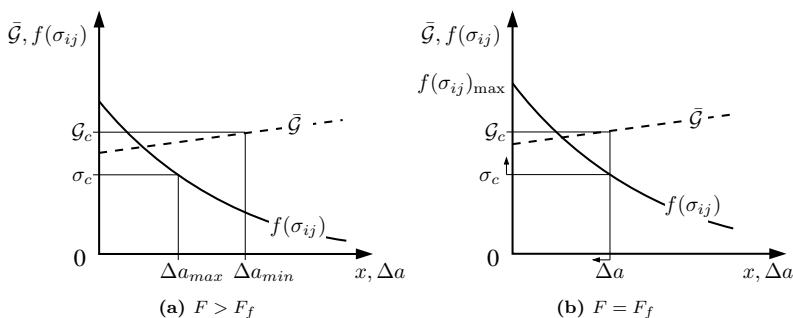
und im Falle der Goland-Reissner-Lösung zu

$$f(\sigma_{ij})^{(GR)} = \frac{\sigma_0^{(GR)}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_0^{(GR)}}{2}\right)^2 + \left(\tau_0^{(GR)}\right)^2} \geq \sigma_c. \quad (6.12)$$

Bei Auswertung der Ojalvo-Eidinoff-Lösung muss entsprechend einer Betrachtung von Rissinitiierung am linken Rand des Überlappungsbereichs die Schubspannung am oberen Rand der Klebschicht berücksichtigt werden:

$$f(\sigma_{ij})^{(OE)} = \frac{\sigma_0^{(OE)}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_0^{(OE)}}{2}\right)^2 + \left(\tau_1^{(OE)}\right)^2} \geq \sigma_c. \quad (6.13)$$

Da aufgrund der vereinfachten Modelle weder die Spannungen singulär noch die differentielle Energiefreisetzungsrate null ist, ergibt sich hier ein Sonderfall des in Kapitel 2.4 dargelegten Optimierungsproblems. In Abbildung 6.6(a) ist dieser



**Abbildung 6.6:** Darstellung des Optimierungsproblems des gekoppelten Kriteriums zur Bestimmung der Rissinitiierungslast und der finiten Risslänge.

dargestellt. Gezeigt ist eine Situation, in der die Belastung unter der Versagenslast liegt. Die untere Grenze der Risslänge ergibt sich aus dem Energieteilkriterium. Nur Risse länger als  $\Delta a_{\min}$  setzen eine für die Rissinitiation ausreichende Energie frei. Die obere Grenze der Risslänge  $\Delta a_{\max}$  ergibt sich aus dem Spannungsteilkriterium, da nur Risse kürzer als diese Grenze auf ihrer gesamten Länge das Spannungskriterium überschreiten. Dementsprechend gibt es in der dargestellten Konfiguration ( $\Delta a_{\max} < \Delta a_{\min}$ ) keine Risslänge, die beide Teilkriterien erfüllt. Die kritische Last für die Rissinitiation ist also nicht erreicht. Bei einer höheren Last verschiebt sich die obere Grenze der Risslänge  $\Delta a_{\max}$  des Spannungsteilkriteriums zu höheren Risslängen, während sich aus dem Energieteilkriterium eine kleinere untere Grenze  $\Delta a_{\min}$  für die finite Risslänge ergibt. Wenn obere und untere Grenze übereinstimmen (Abbildung 6.6(b)) ist die entsprechende Last die kleinste Last, die beide Teilkriterien erfüllt und somit die Versagenslast.

Da die Spannungsfunktionen und die Energiefreisetzungsraten im betrachteten Bereich beide streng monotone Funktionen sind, können die Ungleichungen des gekoppelten Kriteriums zu Gleichungen reduziert werden. Doch aufgrund der Nichtlinearität kann auch hier keine direkte Lösung angegeben werden, sondern ergibt sich aus der Betrachtung des Optimierungsproblems. Dazu können beliebige Algorithmen zur Lösung von Optimierungsproblemen mit Nebenbedingungen, wie etwa die Methode der generalisierten Gradienten, eingesetzt werden (Harzheim, 2008). Lokale Minima können aufgrund der Monotonie nicht auftreten. Eine Umsetzung des Optimierungsproblems in der Mathematik-Software MATHEMATICA erfolgt unter Nutzung der Funktion *FindMinimum*, die bei diesem Optimierungsproblem das Innere-Punkte-Verfahren verwendet (Potra u. Wright, 2000). Aufgrund der geschlossen-analytischen Natur der zugrundeliegenden Gleichungen sind die Rechenzeiten für Strukturanalyse und Lösen des Optimierungsproblems sehr gering.

Die Rechenzeiten<sup>54</sup> für das Volkersen-, das Goland-Reissner- und Ojalvo-Eidinoff-Modell sind durchschnittlich 0,15 s, 1,5 s bzw. 2,6 s. Die Rechenzeit steigt mit der Komplexität der verwendeten Lösung an. Durch die Auswertung des numerischen Integrals ist die Rechenzeit des Ojalvo-Eidinoff-Modells höher.

Um die Rechenzeit der Goland-Reissner- und Ojalvo-Eidinoff-Lösung weiter zu reduzieren und eine leicht verständliche Umsetzung des gekoppelten Kriteriums zu erreichen, wird ein iterativer Lösungsweg vorgeschlagen. Für die iterative Lösung wird ein geeigneter Startwert benötigt. Dieser wird ermittelt, indem die Last bestimmt wird, die das Spanningskriterium direkt am Rand des Überlappungsbereichs genau erfüllt ( $\Delta a = 0$ ). Der Startwert  $F_0$  ist also die Last, die folgende Gleichung erfüllt:<sup>55</sup>

$$f(\sigma_{ij})(x = -L/2) = \sigma_c. \quad (6.14)$$

Nun wird die zugehörige Energiefreisetzungsrate ermittelt.

$$\bar{\mathcal{G}}_0 = \bar{\mathcal{G}}(F = F_0, \Delta a = 0) \quad (6.15)$$

Ist diese größer oder gleich der Bruchzähigkeit,

$$\bar{\mathcal{G}}_0 \geq \bar{\mathcal{G}}_c, \quad (6.16)$$

so ist  $F_0$  die Versagenslast. Für typische Werkstoffe ist dies nicht der Fall und die Versagenslast muss über das folgende Iterationsschema bestimmt werden. Für  $i > 0$  gilt:

$$F_i = \sqrt{\frac{\bar{\mathcal{G}}_c}{\bar{\mathcal{G}}_{i-1}}} \cdot F_{i-1}, \quad (6.17)$$

$$\Delta a_i = \text{Nullstelle } (f(\sigma_{ij})(x = -L/2 + \Delta a_i - 1) = \sigma_c), \quad (6.18)$$

$$\bar{\mathcal{G}}_i = \bar{\mathcal{G}}(F = F_i, \Delta a = \Delta a_i). \quad (6.19)$$

Eine mögliche Abbruchbedingung ist die Konvergenz der Kraft:

$$|F_i - F_{i-1}| < \delta F_i, \quad (6.20)$$

wobei  $\delta$  geeignet zu wählen ist. Für die meisten Ingenieursprobleme reicht eine Konvergenz mit  $\delta = 10^{-5}$  vollkommen aus. Die Entwicklungsvorschrift (6.17) der Iteration folgt aus einer Betrachtung des Zusammenhangs der Energiefreisetzungsrate von der äußeren Last bei einem linearen Modell. Der Einsatz dieser Entwicklungsvorschrift in der Iteration steigert die Effizienz der Lösung deutlich. Die Rechenzeit<sup>56</sup> der Goland-Reissner-Lösung kann so auf 0,003 s und die der

<sup>54</sup>Die Angaben beziehen sich auf die Auswertung auf einem üblichen Arbeitsplatzrechner mit Intel Core 2 mit vier Kernen á 3 GHz.

<sup>55</sup>Die Lösung dieser Gleichung muss aufgrund der Nichtlinearität über eine entsprechende Nullstellensuche ermittelt werden.

<sup>56</sup>Die Angabe bezieht sich ebenfalls auf die Auswertung auf einem üblichen Arbeitsplatzrechner mit Intel Core 2 mit vier Kernen á 3 GHz.



Ojalvo-Eidinoff-Lösung auf 0,6 s reduziert werden. In MATHEMATICA ist es möglich, parallel auf mehreren Prozessorkernen zu rechnen. So können mehrere Konfigurationen gleichzeitig auf den Kernen berechnet und die Rechenzeit weiter reduziert werden. Bei einer parallelen Rechnung auf vier Kernen ergeben sich für die iterative Auswertung der Goland-Reissner-Lösung sowie der Ojalvo-Eidinoff-Lösung Rechenzeiten von 0,002 s bzw. 0,2 s. Im Vergleich dazu beträgt die Rechenzeit des im vorangegangenen Kapitel beschriebenen numerischen Modells 30 min pro Klebverbindungskonfiguration. In dieser Zeit können mit dem Goland-Reissner-Modell 900 000 Konfigurationen und mit dem aufwändigsten geschlossen-analytischen Modell, der Ojalvo-Eidinoff-Lösung, 9000 Konfigurationen ausgewertet werden.

Insbesondere für eine Anwendung dieses Kriteriums in der industriellen Praxis ist ein solcher Weg von Nutzen. Für den Fall der Ojalvo-Eidinoff-Lösung wurde, aufbauend auf der iterativen Lösung, vom Autor ein Beitrag für das Luftfahrttechnische Handbuch erstellt, der die Vorgehensweise ausführt sowie ein Rechenbeispiel darstellt (Weißgraeber, 2013).

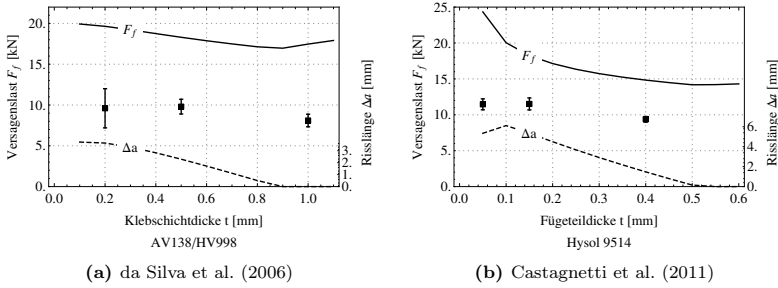
### 6.4.1 Grenzen des Modells

Neben der auch für das numerische Modell bestehenden Notwendigkeit von hinreichend sprödem Materialverhalten und hinreichender Festigkeit der Fügeiteile, ergeben sich aus der Herleitung der geschlossen-analytischen Lösungen ebenfalls Grenzen der Modellierung.

Im Goland-Reissner- und im Ojalvo-Eidinoff-Modell werden die Fügeiteile als Balken beschrieben. Dabei kommt die einfachste Formulierung eines schubstarren Biegebalkens, nämlich der Euler-Bernoulli-Balken, zum Einsatz. Dementsprechend müssen die Überlappungslänge und die Fügeiteillänge so gewählt sein, dass die Abmessungen des Fügeiteils eine Betrachtung mit der Balkentheorie zulassen. Üblicherweise wird für die Schlankheit des Balkens  $L/h > 5$  gefordert (Gross et al., 2012).

Weitere Beschränkungen ergeben sich aus der Modellierung der Klebverbindung als *weak-interface*-Modell. Eine vereinfachte Darstellung der Klebschicht als verschmierte Federn für Schub- und Normalbelastungen ist nur zulässig, wenn die Klebschicht hinreichend dünn und nachgiebig ist. Diese Voraussetzung ist bei den üblichen Klebverbindungskonfigurationen erfüllt: Der Elastizitätsmodul der Klebschicht ist deutlich kleiner als jener der Fügeiteile. Die Voraussetzung hinreichend dünner Klebschichten ist bei Klebschichten bis 1 mm auch auf jeden Fall erfüllt.

Eine weitere Anforderung ergibt sich aus der Definition der Randlasten auf den Überlappungsbereich. In den geschlossen-analytischen Lösungen von Goland-Reissner und Ojalvo-Eidinoff wird ein Momentenfaktor verwendet, um den Zusammenhang von Normalkraft und Biegemoment und dessen Nichtlinearität abzubilden (vgl. Kapitel 3.3). Daraus entsteht die Forderung, dass die äußere Fügeiteillänge, also die Länge der Fügeiteile, die nicht verklebt ist, hinreichend lang sein muss.



**Abbildung 6.7:** Vergleich der berechneten Rissinitiierungslasten des Volkersen-Modells mit experimentellen Ergebnissen. Dargestellt sind die Versagenslastvorhersagen (schwarz) und die finiten Risslängen (gestrichelt). Die experimentellen Ergebnisse sind mit Fehlerbalken dargestellt.

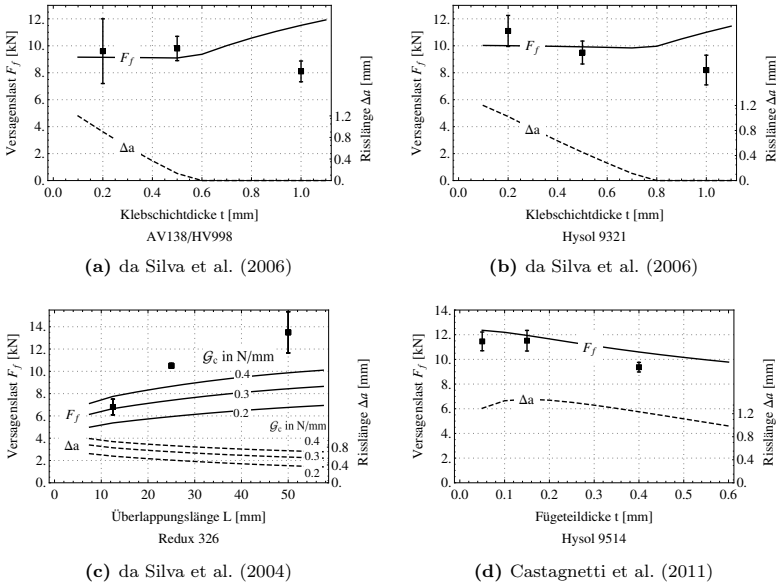
Es wird empfohlen, die in Kapitel 5.8.1 dargestellte Formel zur Bestimmung der minimalen äußeren Fügeteillänge zu verwenden. Mit dieser Fügeteillänge ist der Einfluss dieses Geometrieparameters vernachlässigbar klein.

## 6.5 Ergebnisse der Rissinitiierungsanalyse

### 6.5.1 Vergleich mit Experimenten

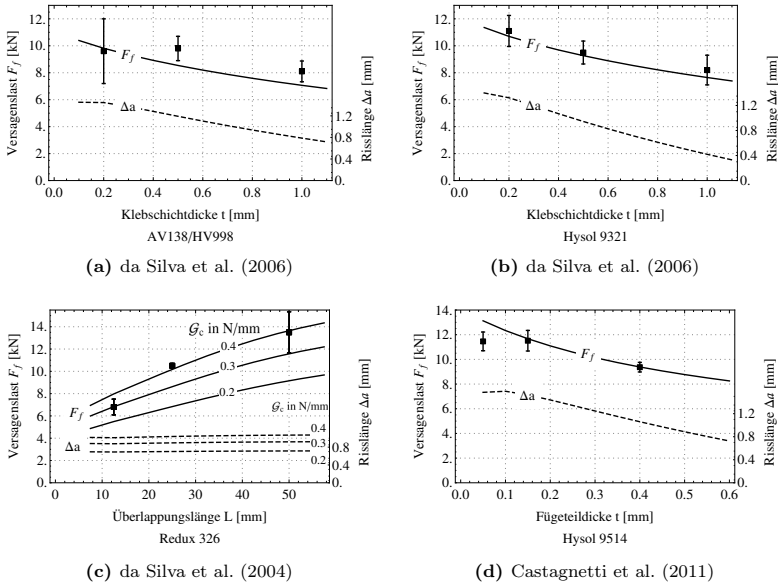
Im Folgenden sollen die Ergebnisse der drei dargestellten geschlossen-analytischen Modelle mit experimentellen Befunden verglichen werden. Wie im vorangegangenen Kapitel 5 werden hierzu die Untersuchungen von da Silva et al. (2004, 2006) und von Castagnetti et al. (2011) über den Einfluss der Klebschichtdicke und der Überlappungslänge auf die Versagenslast verwendet.

Abbildung 6.7 zeigt den Vergleich mit der Volkersen-Lösung. Der Vergleich mit nur zwei der vier Experimente soll genügen, um zu zeigen, dass die Umsetzung des gekoppelten Kriteriums auf Basis der Volkersen-Lösung nicht geeignet ist, um die Rissinitiierung in Klebverbindungen zu beschreiben. Die Versagenslasten werden deutlich überschätzt und der Effekt der geometrischen Parameter wird nicht richtig abgebildet. Der Einfluss der Schälspannung auf die Rissinitiierung in Klebverbindungen ist zu groß, als dass dieses Modell, das nur Schubspannungen berücksichtigt, eine gute Vorhersage der Versagenslasten liefern kann. Auch zeigten dementsprechend schon die Ergebnisse der Energiefreisetzungsraten (siehe vorangegangenen Abschnitt 6.3) die größte Abweichung von der Referenzlösung.



**Abbildung 6.8:** Vergleich der berechneten Rissinitiierungslasten des Goland-Reissner-Modells mit experimentellen Ergebnissen. Dargestellt sind die Versagenslastvorhersagen (schwarz) und die finiten Risslängen (gestrichelt). Die experimentellen Ergebnisse sind mit Fehlerbalken dargestellt.

In Abbildung 6.8 ist der Vergleich aller betrachteten Experimente mit der Analyse auf Basis der Goland-Reissner-Lösung zu sehen. Abbildungen 6.8(a,b) zeigen den Vergleich mit der Untersuchung des Klebschichtdickeneffekts von da Silva et al. (2006). Während für kleine Klebschichtdicken eine abnehmende Versagenslast vorhergesagt wird, wird ein deutlicher Anstieg der Versagenslast postuliert, wenn die finite Risslänge auf null gesunken ist. Eine Risslänge von null bedeutet in diesem Fall, dass das Spannungsteilkriterium die Versagenslastvorhersage dominiert. Dieses Verhalten stimmt nicht mit den experimentellen Befunden überein. Beim Vergleich mit der Studie von da Silva et al. (2004) zum Einfluss der Überlappungslänge zeigt sich, dass das Modell mit Goland-Reissner-Lösung den Effekt der Überlappungslänge nicht ausreichend abbildet. Der Vergleich mit der Studie von Castagnetti et al. (2011) zeigt eine gute Übereinstimmung der Versagensvorhersage mit den experimentellen Befunden. Insgesamt liegen die Versagensvorhersagen etwa im Bereich der experimentell ermittelten Versagenslasten. Der Effekt der Klebschichtdicke wird nicht für alle betrachteten Fälle gut abgebildet. Der Effekt der Überlappungslänge wird abgebildet, das Ansteigen der Versagenslast mit



**Abbildung 6.9:** Vergleich der berechneten Rissinitiierungslasten des Ojalvo-Eidinoff-Modells mit experimentellen Ergebnissen. Dargestellt sind die Versagenslastvorhersagen (schwarz) und die finiten Risslängen (gestrichelt). Die experimentellen Ergebnisse sind mit Fehlerbalken dargestellt.

zunehmender Überlappungslänge ist aber nicht ausreichend ausgeprägt.

In Abbildung 6.9 ist der Vergleich mit der Auswertung des gekoppelten Kriteriums auf Basis der geschlossen-analytischen Ojalvo-Eidinoff-Lösung dargestellt. Abbildung 6.9(a,b) zeigt den Vergleich mit der Untersuchung des Klebschichtdickeneffekts von da Silva et al. (2006). Es ergibt sich wieder eine gute Übereinstimmung der Versagenslasten und der Klebschichtdickeneffekt ist gut abgebildet. In Abbildung 6.9(c) wird die analytische Lösung mit der Studie zum Einfluss der Überlappungslänge von da Silva et al. (2004) verglichen und es ergibt sich eine gute Übereinstimmung. Im Bereich der betrachteten, in der Literatur als möglich angegebenen Bruchzähigkeiten, ist der Einfluss der Überlappungslänge sehr gut abgebildet. Die vorhergesagten Versagenslasten befinden sich alle nah an den experimentell ermittelten Lasten. Die relative Abweichung<sup>57</sup> liegt im Mittel bei 7%. Nur bei der sehr kleinen Klebschichtdicke  $t = 0,05$  mm des Versuchs von Castagnetti et al.

<sup>57</sup>Hierbei wurde für die Versuche mit Redux 326 die mittlere Bruchzähigkeit von  $G_c = 0,3 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}$  berücksichtigt.

(2011) ist die Versagensvorhersage signifikant größer als die experimentell ermittelte Versagenslast (+14,5%).

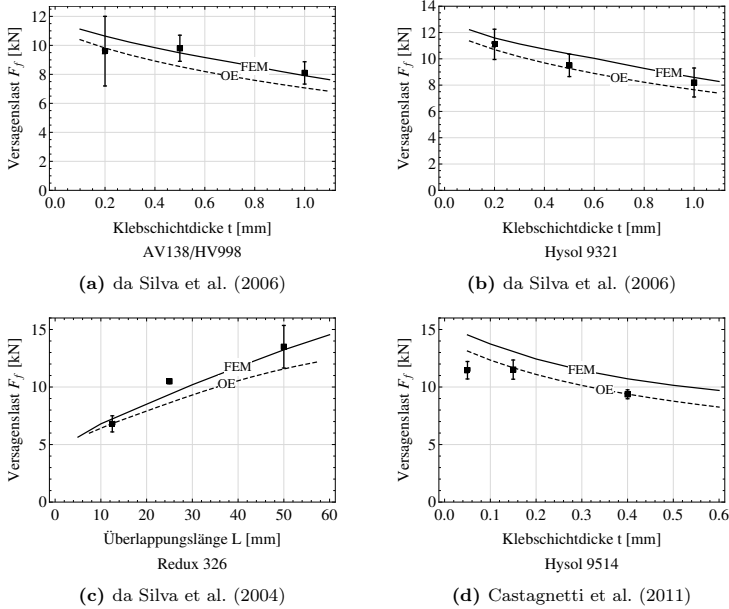
Aus diesem Vergleich mit experimentellen Studien ergibt sich die Schlussfolgerung, dass die Volkersen- und die Goland-Reissner-Lösung nicht ausreichen, um das Verhalten der Klebverbindung hinreichend zu beschreiben. Insbesondere das sehr einfache Volkersen-Modell ist unzureichend und liefert deutlich zu hohe Werte für die Rissinitiierungslasten. Die Ojalvo-Eidinoff-Lösung stellt eine genauere Analyse von einschnittigen Klebverbindungen dar und es wurde gezeigt, dass eine Umsetzung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums mit dieser Lösung zu guten Versagensvorhersagen führt. Die vollständige Berücksichtigung der Klebschichtdicke in der Herleitung der Spannungen und die Berücksichtigung des vollständigeren Ansatzes für die Schubdeformation stellt den entscheidenden Vorteil der Ojalvo-Eidinoff-Lösung dar.

### 6.5.2 Vergleich mit den Ergebnissen der numerischen Umsetzung

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der vorliegenden Umsetzung des gekoppelten Kriteriums mit geschlossen-analytischen Modellen mit den numerischen Ergebnissen des vorangegangenen Kapitels verglichen. Bei der Betrachtung der Energiefreisetzungsrates im Vergleich zur Finite-Elemente-Lösung und beim Vergleich mit experimentellen Ergebnissen hat das Ojalvo-Eidinoff-Modell die beste Übereinstimmung gezeigt (vgl. Kapitel 6.3 und 6.5.1). Daher wird im Folgenden für den Vergleich dieses Modell herangezogen. Der Vergleich wird für vier unterschiedliche Klebverbindungen durchgeführt. Dabei werden wieder die Konfigurationen des Vergleichs mit experimentellen Daten verwendet.

Abbildung 6.10 zeigt den Vergleich der Versagenslastvorhersage des Ojalvo-Eidinoff-Modells und der Finite-Elemente-Routine. Da die Energiefreisetzungsrates des geschlossen-analytischen Modells immer über der der numerischen Lösung liegt (vgl. Abbildung 6.3 und 6.4) ergeben sich in der geschlossen-analytischen Lösung immer geringere Versagenslasten als in der numerischen Lösung. Die Abweichung der beiden Versagenslastvorhersagen beträgt bei der betrachteten Variation der Überlappungslänge und der Klebschichtdicke maximal 17%. Die Effekte der geometrischen Parameter – Klebschichtdicke und Überlappungslänge – sind von beiden Modellen mit sehr guter Übereinstimmung zu den Experimenten abgebildet.

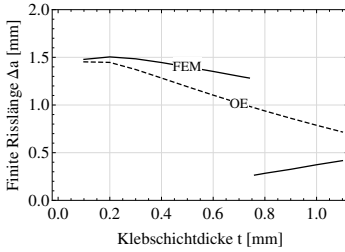
Die finiten Risslängen, die sich aus den beiden betrachteten Modellen ergeben, sind in Abbildung 6.11 dargestellt. Die finiten Risslängen liegen in der gleichen Größenordnung mit bisweilen guter Übereinstimmung. Obschon das geschlossen-analytische Modell eine starke Näherung darstellt und der Verlauf der Energiefreisetzungsrates über der Risslänge (vgl. Abbildung 6.3) sich deutlich von der numerischen Lösung unterscheidet, liegen die Vorhersagen relativ nahe beieinander. Dabei zeigt sich, dass die finiten Risslängen der numerischen Lösung



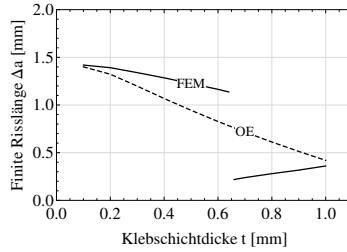
**Abbildung 6.10:** Vergleich der berechneten Rissinitiierungslasten des Ojalvo-Eidinoff-Modells mit den Ergebnissen der numerischen Umsetzung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums sowie mit den Experimenten. Dargestellt sind die Versagenslastvorhersagen des Ojalvo-Eidinoff-Modells (schwarz) und der numerischen Umsetzung aus Kapitel 5 (gestrichelt). Die experimentellen Ergebnisse sind mit Fehlerbalken dargestellt.

im Bereich III (vgl. Kapitel 5.5.2) immer über denen der geschlossen-analytischen Lösung liegen.

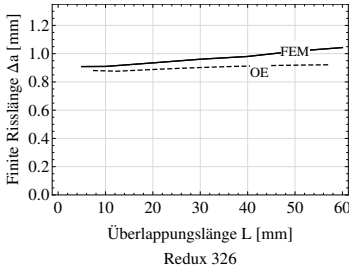
Insgesamt zeigt sich eine gute Übereinstimmung der Umsetzung des gekoppelten Kriteriums auf Basis der geschlossen-analytischen Ojalvo-Eidinoff-Lösung und der numerischen Umsetzung mit der Finite-Elemente-Methode. Die geschlossen-analytische Lösung kann die Spannungssingularität nicht korrekt abbilden und dementsprechend ist die Energiefreisetzungsrates für infinitesimale Risse nicht null. Wie in Kapitel 3.3 dargestellt ist des Weiteren die Bedingung verschwindender Schubspannungen am Rand der Klebschicht ebenfalls nicht abgebildet. Diese Defizite sind aber bei der Lösung des gekoppelten Kriteriums nicht entscheidend, da nicht-lokal ausgewertet wird. Die finite Risslänge bestimmt den Abstand von der Spannungskonzentration, an dem die Spannungen ausgewertet werden und die



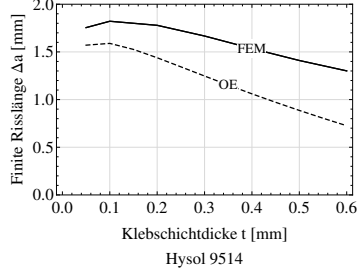
(a) da Silva et al. (2006)



(b) da Silva et al. (2006)



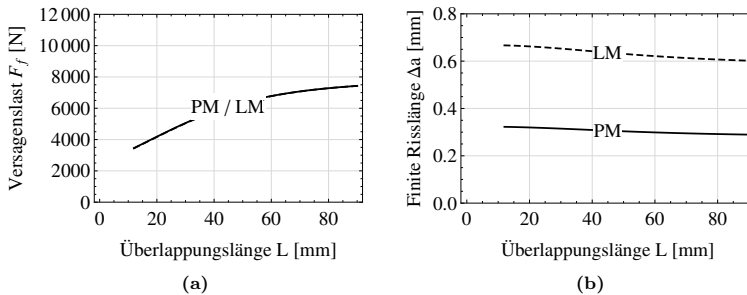
(c) da Silva et al. (2004)



(d) Castagnetti et al. (2011)

**Abbildung 6.11:** Vergleich der berechneten finiten Risslängen des Ojalvo-Eidinoff-Modells mit denen der numerischen Umsetzung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums für die betrachteten Konfigurationen der Experimente. Dargestellt sind die Vorhersagen der finiten Risslänge des Ojalvo-Eidinoff-Modells (schwarz) und der numerischen Umsetzung aus Kapitel 5 (gestrichelt).

Länge, über welche die differentielle Energiefreisetzungsrate gemittelt wird. Daher ist die geringe Genauigkeit der Spannungslösung ganz am Ende des Überlappungsbereichs von untergeordneter Bedeutung.



**Abbildung 6.12:** Einfluss der punktwise und gemittelten Auswertung des Spannungskriteriums. (PM= Point Method, LM=Line Method). (Stahl-Epoxy-Fügung,  $h = 1,5$  mm;  $t = 0,5$  mm)

## 6.6 Untersuchung der verschiedenen Formulierungen des gekoppelten Kriteriums

Wie auch schon bei der Betrachtung der Rissinitiierung mit dem numerischen Modell (Kapitel 5), soll nun der Einfluss der Formulierung der Finiten Bruchmechanik untersucht werden. Dazu wird neben der bisher verwendeten Point-Method (2.72), die eine Erfüllung des Spannungskriteriums an jedem Punkt des betrachteten finiten Risses fordert, auch die Line-Method (2.73), die eine Erfüllung des Spannungsteilkriteriums für eine über die Risslänge gemittelte Spannung fordert, betrachtet. Auch bei der vorliegenden Umsetzung mit geschlossen-analytischen Lösungen hat die Formulierung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums keinen Einfluss auf die Modellbildung und die Auswertung der Spannungen und Energiefreisetzungsraten. Lediglich bei der Lösung des Optimierungsproblems muss die geänderte Formulierung des Spannungsteilkriteriums berücksichtigt werden.

Im Folgenden wird lediglich das Ojalvo-Eidinoff-Modell betrachtet. Die Aussagen sind aber allgemeingültig für alle betrachteten geschlossen-analytischen Lösungen. Abbildung 6.12 zeigt die Ergebnisse der bisher verwendeten Point-Method im Vergleich zu einer Auswertung der Line-Method. Die Ergebnisse der Versagenslastvorhersage unterscheiden sich kaum, der Unterschied ist kleiner als 1%. Die Versagensvorhersagen der Line-Method liegen, wie erwartet, stets unter den Werten der Point-Method. Die finiten Risslängen, die sich bei einer Auswertung der Line-Method ergeben, sind etwas mehr als doppelt so groß wie die der Point-Method.



## 6.7 Einfluss der Sprödigkeit auf die Rissinitiierung

In diesem Abschnitt wird ein Ansatz vorgestellt, die eingangs geforderte Bedingung von „hinreichend sprödem“ Materialverhalten für die Analyse der Rissinitiierung zu untersuchen.

In vielen Strukturproblemen sind Größeneffekte bedeutsam. Dann sind die Versagensvorgänge und -lasten von der Größe der betrachteten Struktur abhängig. Besonders wichtig sind Größeneffekte, wenn zwischen experimentellen Untersuchungen im Labor und der realen Struktursituation, mehrere Größenordnungen liegen. Dies spielt zum Beispiel bei Versagensvorgängen in Eis<sup>58</sup> (Dempsey et al., 1995, Li u. Bažant, 1998) oder in Beton (Bažant, 1984, Bažant u. Planas, 1997) eine wichtige Rolle. Dabei wird beobachtet, dass mit zunehmender Größe der Struktur ein Übergang von kerbunempfindlichem, duktilem Versagen zu sprödem Versagen stattfindet. Die Sprödigkeit ist nicht nur Materialparameter, sondern auch von der Größe der Struktur abhängig. Um die Sprödigkeit einer Struktur zu bewerten wurde von Carpinteri (1982) mittels Dimensionsanalyse eine dimensionslose Kennzahl ermittelt, die das Versagensgeschehen kontrollieren muss:

$$\mu = \frac{K_{Ic}}{\sigma_c \sqrt{b}}. \quad (6.21)$$

Dabei ist  $b$  eine Länge, welche die Größe der Struktur charakterisiert. Die eingeführte Größe wird Sprödigkeitszahl<sup>59</sup> genannt. Dabei muss beachtet werden, dass kleine Werte der Struktur sprödes Verhalten beschreiben und im Falle  $\mu \rightarrow \infty$  ideal elastisch-plastisches Materialverhalten vorliegt.

Bei der Betrachtung von Klebschichten ist die Klebschichtdicke die entscheidende Strukturgröße, die den Übergang von duktilem zu sprödem Versagen kennzeichnet (Gleich et al., 2001, Cornetti et al., 2012). Von Cornetti et al. (2012) wurde für den Fall einer reinen Modus-II Belastung einer dünnen, nachgiebigen Schicht, analog zur Sprödigkeitszahl von Carpinteri (1982), eine Sprödigkeitszahl vorgeschlagen:

$$\mu = 2 \frac{k_t G_{IIc}}{\tau_c^2}. \quad (6.22)$$

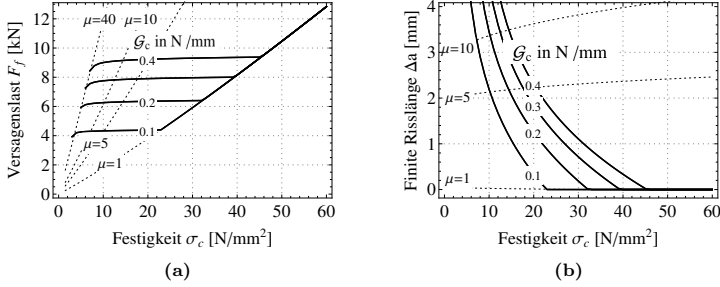
Dabei ist  $\tau_c$  die Schubfestigkeit und  $k_t$  ist die Schubsteifigkeit der Schicht:  $k_t = G/t$ . Der Faktor zwei ergibt sich aus der Bedingung, dass sich für  $\mu = 1$  gleichzeitige Erfüllung des Spannungs- und Energieteilkriteriums ergibt.

Im Folgenden wird für das Ojalvo-Eidinoff-Modell eine Sprödigkeitszahl für Mixed-Mode-Belastung vorgeschlagen:

$$\mu = \psi \frac{E_a G_c}{t \sigma_c^2} \quad (6.23)$$

<sup>58</sup>Beispiele für relevante Struktursituation sind hier etwa Bohrsnln im Meereis oder die Analyse von Gletscherströmen.

<sup>59</sup>Auch Sprödigkeitsziffer; engl.: brittleness number.



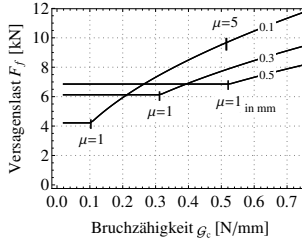
**Abbildung 6.13:** Untersuchung des Einflusses der Sprödigkeit auf die Ergebnisse des Ojalvo-Eidinoff-Modells durch Variation der Festigkeit  $\sigma_c$ .

$$\text{mit } \psi = 2 \frac{\left( \frac{\sigma_{0,\max}^{(\text{OE})}}{2} + \sqrt{\left( \frac{\sigma_{0,\max}^{(\text{OE})}}{2} \right)^2 + \tau_{1,\max}^{(\text{OE})}} \right)^2}{\left( \sigma_{0,\max}^{(\text{OE})} \right)^2 + \frac{E_a}{G_a} \left( \tau_{0,\max}^{(\text{OE})} \right)^2}. \quad (6.24)$$

Wieder entspricht  $\mu = 1$  dem Fall einer gleichzeitigen Erfüllung des Spannungs- und des Energieteilkriteriums für verschwindende Risslängen. Der Vorfaktor hängt vom Verhältnis der Schub- und Schälbelastung am Ende des Überlappungsbereichs ab. Für gängige Konfigurationen einschnittiger Überlappungsfügungen gilt  $\psi \approx 1, 7$ .

Betrachtet man die Sprödigkeitszahl (6.23), erkennt man, dass neben Materialkenngrößen wie dem Elastizitätsmodul, der Festigkeit und der Bruchzähigkeit der Klebschicht auch deren Dicke Eingang findet. Die Klebschichtdicke kontrolliert entscheidend, wieviel Energie für den Bruchprozess zur Verfügung steht, und damit die Sprödigkeit der Klebschicht.

In Abbildung 6.13(a) ist der Einfluss der Festigkeit  $\sigma_c$  auf die Versagenslasten dargestellt. Dabei sind gestrichelte Linien konstanter Sprödigkeitszahl eingezeichnet. Diese stellen entsprechend Gleichung (6.23) Parabeln dar. Man erkennt, dass die Festigkeit für Sprödigkeitszahlen größer eins einen wesentlich geringeren Einfluss auf die Versagenslast hat als die als Scharparameter dargestellte Bruchzähigkeit. Mit zunehmender Festigkeit sinkt die Sprödigkeitszahl bis auf den Wert Eins, wo alle Kurven zusammenfallen. Ist die Sprödigkeitsziffer gleich oder kleiner eins, dominiert die Festigkeit die Vorhersage der Versagenslast. Dann ist das Energieteilkriterium stets erfüllt und allein das Festigkeitsteilkriterium bestimmt die Versagenslast. In Abbildung 6.13(b) sind die entsprechenden finiten Risslängen dargestellt. Mit steigender Festigkeit geht die finite Risslänge gegen null. Entsprechend der Definition der Sprödigkeitszahl und des Vorfaktors  $\psi$  liegt die Linie



**Abbildung 6.14:** Einfluss der Bruchzähigkeit auf die berechneten Rissinitiierungslasten des Ojalvo-Eidinoff-Modells für unterschiedliche Klebschichtdicken. Betrachtung der Sprödigkeit anhand der Sprödigkeitszahl.

$\mu = 1$  auf der Null. Mit kleineren Festigkeiten steigt die Sprödigkeitszahl und die Lösung des gekoppelten Kriteriums ergibt sehr große Risslängen. Bei sehr großen Risslängen kann erwartet werden, dass die Annahme rein spröden Versagens mit linear-elastischem Materialverhalten bis zur Rissinitiierung nicht mehr gehalten werden kann.

Auch bei der Betrachtung des Einflusses der Bruchzähigkeit (Abbildung 6.14) lassen sich zwei Bereiche erkennen. Für  $\mu > 1$  zeigt die Bruchzähigkeit einen deutlichen Einfluss auf die Versagenslast, während sie für  $\mu \leq 1$  keinen Einfluss hat. Das führt bei geringen Bruchzähigkeiten zu einer Umkehr des Klebschichtdickeneffekts.

Bei üblichen Klebverbindungen oder anderen Struktursituationen mit Versagen in einer dünnen, nachgiebigen Schicht liegt die Sprödigkeitszahl fast immer über eins.<sup>60</sup> Betrachtet man die Werte der Sprödigkeitszahl bei den experimentell untersuchten Klebverbindungen, so liegen diese im Bereich  $2 < \mu < 22$ . Dabei zeigen insbesondere die Klebverbindungen mit einer Sprödigkeitszahl  $\mu < 10$  eine sehr gute Übereinstimmung der Versagensvorhersage mit den experimentellen Befunden. Neben diesen vier experimentellen Testreihen wurden auch weitere berücksichtigt und mit Hilfe der vorliegenden Methode untersucht, die jedoch nicht der Bedingung hinreichend sprödem Materialverhalten genügen. Bei der Auswertung der duktilen Klebverbindungen mit dem Kriterium für Rissinitiierung ergeben sich sehr große Risslängen und teilweise konnte keine Lösung des Optimierungsproblems gefunden werden (Risse über die gesamte Überlappungslänge). Wenn Versagenslasten ermittelt werden können, sind diese deutlich höher als die experimentell ermittelten.<sup>61</sup>

<sup>60</sup>In der Literatur findet sich nach Kenntnis des Autors nur ein Hinweis auf eine Sprödigkeitszahl kleiner eins: bei der Untersuchung von Schwachschichten in Schneedecken zur Analyse der Initiierung von Schneebrettlawinen (Chiaia et al., 2008).

<sup>61</sup>Das gleiche Ergebnis der Nichtanwendbarkeit des gekoppelten Kriteriums zeigt bei diesen duktilen Klebschichten auch eine Analyse mit der numerischen Umsetzung des gekoppelten Kriteriums.

Parameter	Experimentelle Studie		$\mu$	
	Referenz	Klebstoff	min	max
Klebschichtdicke	da Silva et al. (2006)	AV138/HV998	2,2	9,9
Klebschichtdicke	da Silva et al. (2006)	Hysol EA 9321	1,5	6,8
Klebschichtdicke	da Silva et al. (2006)	Hysol EA 9361	44,9	216,9
Klebschichtdicke	Castagnetti et al. (2011)	Hysol EA 9514	3,0	22,5
Klebschichtdicke	Castagnetti et al. (2011)	Multibond 330	20,7	159,5
Überlappungs- länge	da Silva et al. (2004)	Redux 326	4,4	9,6

**Tabelle 6.1:** Die Sprödigkeitszahlen der experimentell untersuchten Klebverbindungen. Es ist jeweils die Spanne der Sprödigkeitszahl angegeben, die sich aus der Variation des Parameters ergibt.

Es wurden zum Beispiel die Untersuchungen von da Silva et al. (2006) mit dem Klebstoff Hysol EA 9361 und von Castagnetti et al. (2011) mit dem Klebstoff Multibond 330 analysiert. Für die in diesen Studien untersuchten Klebverbindungen ergeben sich hohe Werte für die Sprödigkeitszahl  $\mu$ . Eine Übersicht der Sprödigkeitszahlen bei den betrachteten experimentellen Studien ist in Tabelle 6.1 aufgeführt.

Die Sprödigkeitsziffer beschreibt den Übergang von sprödem zu duktilem Materialverhalten und erlaubt eine a-priori-Abschätzung der Eignung des gekoppelten Kriteriums für die Bewertung von Klebverbindungen. Ist die Sprödigkeitszahl sehr groß (50 und größer) liegt ein weitgehend duktils Verhalten der Klebschicht vor und eine Analyse der Rissinitiierung mittels der Finiten Bruchmechanik liefert keine oder zu hohe Versagensvorhersagen. Liegt die Sprödigkeitsziffer jedoch unter einem Wert von zehn, liegt ein hinreichend sprödes Verhalten der Klebschicht vor. Dann ergibt die vorliegende Betrachtung eine sehr gute Abschätzung der Versagenslast mit konservativen Ergebnissen.

## 6.8 Anmerkungen und Ausblick

### 6.8.1 Erweiterung auf andere Klebverbindungen

Die vorliegende Untersuchung beschränkt sich auf die Analyse von einschnittigen Überlappungsfügungen. Die Methodik lässt sich allerdings leicht für andere Klebverbindungen erweitern. Voraussetzung dafür ist, dass eine entsprechende Näherungslösung für die Spannungen in der Klebschicht bekannt ist. Obendrein muss man Kenntnis über die zu erwartende Rissinitiierung haben. Zu dieser kann man

zum Beispiel durch Experimente oder numerische Untersuchungen<sup>62</sup> gelangen.

Eine Möglichkeit, ein sehr allgemeines Versagensmodell für Klebverbindungen zu erstellen, stellt die Verwendung von „general sandwich-type“-Modellen dar (vgl. Kapitel 3.3). In diesen Modellen (z. B. Bigwood u. Crocombe (1989), Weißgraeber et al. (2014c)) wird nur der Überlappungsbereich von Klebverbindungen betrachtet und durch entsprechende Wahl der zwölf Schnittgrößen an den Rändern der Füge-teile können eine Vielzahl von praxisrelevanten Klebverbindungskonfigurationen abgebildet werden. Mit der Nutzung solcher Modelle für die Auswertung mit dem gekoppelten Kriterium müsste es möglich sein, die Rissinitiierungslasten für viele praxisrelevante Klebverbindungskonfigurationen zu berechnen.

### 6.8.2 Strukturoptimierungen

Die vorliegende Methode zur Bestimmung der Rissinitiierungslasten eignet sich durch die hohe Effizienz in besonderer Weise für die Verwendung in Struktur-optimierungen. Mit geeignet formulierten Optimierungsproblemen können Kleb-verbindingsentwürfe ermittelt werden, die sich durch eine optimierte Traglast auszeichnen. Dabei können unterschiedliche Fragestellungen betrachtet werden. Je nach struktureller Situation kann es interessant sein, die Klebverbindungskonfigu-ration zu ermitteln, die in einem zulässigen Bauraum die Versagenslast maximiert. Oder es wird die Klebverbindungskonfiguration identifiziert, die eine bestimmte vorgegebene Last bei minimalem Gewicht oder Materialaufwand gerade noch trägt. Dies sind typische Fragestellungen in Vorauslegungs- und Entwurfsprozessen.

---

<sup>62</sup>Dabei müssen numerische Methoden verwendet werden, die in der Lage sind, a priori unbekannte Risskonfigurationen zu erfassen. Vertreter solcher Methoden sind die eXtended Finite Element Method (XFEM) oder Phasenfeldmodelle (vgl. Kapitel 2.4).



# Kapitel 7

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden neuartige Methoden zur Bewertung von Klebverbindungen vorgeschlagen. Diese erlauben eine effiziente Analyse der Spannungen und Deformationen von einschnittigen Klebverbindungen sowie deren sprödem Versagen. Die vorgestellten Konzepte tragen zu einem verbesserten Verständnis von Klebverbindungen bei, welches Voraussetzung für eine weite Verbreitung dieser vorteilhaften Verbindungstechnologie ist. Die vorliegende Arbeit liefert damit einen Beitrag zur Analyse von Klebverbindungen und zum grundlegenden Problem der Schädigungsinitiierung in ungeschädigten Körpern.

Einschnittige Überlappungsfügungen stellen die gebräuchlichste Form von Klebverbindungen dar, da sie eine hohe Leichtbaugüte bei geringem Fertigungsaufwand aufweisen. Diese Konfiguration ist jedoch in besonderem Maße durch ein komplexes mechanisches Verhalten gekennzeichnet. Daher erfolgte eine Konzentration auf diese Klebverbindung.

Es wurden die Konzepte und Kriterien der Finiten Bruchmechanik eingesetzt, um Rissinitiierung in Klebverbindungen zu bewerten. Aufgrund fehlender Standardliteratur wurden die Hintergründe dieser jungen Theorie in Kapitel 2.4 sehr detailliert dargestellt. Dabei wurde die Verwandtschaft der Finiten Bruchmechanik zu bestehenden Ansätzen zur Bewertung von Rissinitiierung aufgezeigt. Eine besondere Eigenschaft des gekoppelten Kriteriums ist, dass nur die Festigkeit und Bruchzähigkeit benötigt werden und keine empirischen Längenparameter eingeführt werden müssen.

Das in Kapitel 4 vorgestellte semi-analytische Berechnungsverfahren erlaubt eine effiziente Analyse der Deformationen und Spannungen in einer einschnittigen Klebverbindung. Statt – wie etwa in der Finite-Elemente-Methode – den betrachteten Körper vollständig zu diskretisieren, wurden in diesem Verfahren in einer Richtung a priori unbekannte Verschiebungsfunktionen eingeführt, die dann mit der Variationsrechnung aus dem Prinzip des Stationärwerts des Gesamtpotentials bestimmt wurden. Für die Lösung des resultierenden Differentialgleichungssystems wurde ein konvergenter Lösungsweg unter Nutzung der Matrixexponentialfunktion vorgeschlagen. Die Ergebnisse der Deformationen und Spannungen zeigen eine exzellente Übereinstimmung mit fein vernetzten Finite-Elemente-Referenzrechnungen. Die vorgestellte Routine kann für Prozesse in der Vorauslegung von Klebverbindungen, wie etwa Parameterstudien oder Optimierungsproblemen, aufgrund ihrer hohen Effizienz sehr vorteilhaft eingesetzt werden.

In Kapitel 5 wurde ein neuartiger Analysezugang für die Bewertung von Rissinitiierung in spröden Klebverbindungen vorgestellt. Der Zugang basiert auf dem in Kapitel 2 ausführlich beschriebenen gekoppelten Spannungs- und Energiekriterium im Rahmen der Finiten Bruchmechanik. Im vorgestellten Analysezugang erfolgt die notwendige Bestimmung des Spannungszustandes und der Energiefreisetzungsrate der betrachteten Risskonfigurationen mit einer detaillierten Finite-Elemente-Routine. Zur Abbildung des Effektes der großen Biegedeformationen der Fügeiteile erfolgt dabei eine Betrachtung von geometrischer Nichtlinearität. Die Energiefreisetzungsrate zeigt dabei eine nicht-monotone Abhängigkeit von der Risslänge. Dieses Ergebnis und seine Auswirkungen auf die Lösung des gekoppelten Kriteriums und auf die Stabilität der initiierten Risse wurden ausführlich diskutiert. Die Ergebnisse der Versagenslastvorhersage wurden mit experimentellen Ergebnissen verglichen und zeigen eine gute Übereinstimmung mit diesen. Der aus Experimenten bekannte Klebschichtdickeneffekt, der abnehmende Versagenslasten bei zunehmender Klebschichtdicke zeigt, wird mit dem vorliegenden Modell korrekt abgebildet. Das vorliegende Modell kann also für den Fall spröden Versagens eine physikalische Erklärung für den in der Literatur vielfach diskutierten Klebschichtdickeneffekt geben. Mit dem gegebenen Versagensmodell wurde der Einfluss weiterer Parameter untersucht. Dabei wurde eine minimale Länge der Fügeiteile identifiziert, die notwendig ist, um eine isolierte Untersuchung einzelner Parameter möglich zu machen. Für die numerisch ermittelten Ergebnisse dieser minimalen Länge der Fügeiteile wurde eine Näherungsformel bestimmt, die es ermöglicht, die Länge für eine Vielzahl von Klebverbindungskonfigurationen direkt zu ermitteln. Des Weiteren wurde der Einfluss der geometrischen Nichtlinearität untersucht und es wurde gezeigt, dass deren Vernachlässigung einen erheblichen Einfluss auf die berechneten Rissinitiierungslasten haben kann.

Ein weiteres Modell zur Berechnung der Rissinitiierungslasten wurde in Kapitel 6 vorgeschlagen. Auch in diesem erfolgt eine Auswertung des gekoppelten Spannungs- und Energiekriteriums. Jedoch werden statt einer aufwändigen numerischen Analyse klassische geschlossen-analytische Modelle für die Bestimmung der Spannungen und Energiefreisetzungsraten verwendet. Mit einer geeignet gewählten iterativen Lösung ergibt sich ein hocheffizientes Modell für die Berechnung der Rissinitiierungslasten von einschnittigen Klebverbindungen. Insbesondere die Lösung auf Basis des Ojalvo-Eidinoff-Modells zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen. Der Klebschichtdickeneffekt wird ebenfalls korrekt dargestellt. Für den vorliegenden Fall einer Mixed-Mode-Belastung bei der Rissinitiierung wurde eine dimensionslose Sprödigkeitsziffer vorgeschlagen. Diese erlaubt eine Quantifizierung der Bedingung „hinreichender Sprödigkeit“ der Finiten Bruchmechanik.

Ein detaillierter Ausblick auf mögliche Erweiterungen der vorgestellten Analysen, wie etwa die Betrachtung von Faserkunststoffverbunden oder anderen Klebverbindungskonfigurationen, ist am Ende der jeweiligen Kapitel gegeben.



## Literaturverzeichnis

- [Adams et al. 1986] ADAMS, R. ; ATKINS, R. ; HARRIS, J. ; KINLOCH, A.: Stress analysis and failure properties of carbon-fibre-reinforced-plastic/steel double-lap joints. In: *The Journal of Adhesion* 20 (1986), Nr. 1, S. 29–53
- [Adams et al. 1997] ADAMS, R. ; COMYN, J. ; WAKE, W.: *Structural adhesive joints in engineering*. Springer, 1997
- [Adams u. Harris 1987] ADAMS, R. ; HARRIS, J.: The influence of local geometry on the strength of adhesive joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 7 (1987), Nr. 2, S. 69–80
- [Adams u. Mallick 1992] ADAMS, R. ; MALLICK, V.: A method for the stress analysis of lap joints. In: *The Journal of Adhesion* 38 (1992), Nr. 3-4, S. 199–217
- [Adams u. Peppiatt 1974] ADAMS, R. ; PEPPIATT, N.: Stress analysis of adhesive-bonded lap joints. In: *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 9 (1974), Nr. 3, S. 185–196
- [Alfredsson u. Högberg 2007] ALFREDSSON, K. ; HÖGBERG, J. L.: Energy release rate and mode-mixity of adhesive joint specimens. In: *International Journal of Fracture* 144 (2007), Nr. 4, S. 267–283
- [Allman 1977] ALLMAN, D.: A theory for elastic stresses in adhesive bonded lap joints. In: *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 30 (1977), Nr. 4, S. 415–436
- [Anderson u. DeVries 1987] ANDERSON, G. ; DEVRIES, K.: Predicting bond strength. In: *The Journal of Adhesion* 23 (1987), Nr. 4, S. 289–302
- [Anderson u. DeVries 1989] ANDERSON, G. ; DEVRIES, K.: Predicting strength of adhesive joints from test results. In: *International Journal of Fracture* 39 (1989), Nr. 1-3, S. 191–200
- [Anderson 2005] ANDERSON, T. L.: *Fracture mechanics: Fundamentals and Applications*. CRC press, 2005
- [Andersons et al. 2010] ANDERSONS, J. ; TARASOV, S. ; SPĀRNIŅŠ, E.: Finite fracture mechanics analysis of crack onset at a stress concentration in a UD glass/epoxy composite in off-axis tension. In: *Composites Science and Technology* 70 (2010), Nr. 9, S. 1380–1385

- [Aranson et al. 2000] ARANSON, I. ; KALATSKY, V. ; VINOKUR, V.: Continuum field description of crack propagation. In: *arXiv preprint cond-mat/0001298* (2000)
- [Artel 2007] ARTEL, J.: *Einige Erweiterungen der Rand-Finite-Elemente-Methode und deren Anwendung auf Randeffekte in ebenen Laminaten*. Bd. 17. Dissertation, TU Darmstadt, Studienbereich Mechanik, 2007
- [Ascione 2009] ASCIONE, F.: Mechanical behaviour of FRP adhesive joints: A theoretical model. In: *Composites Part B: Engineering* 40 (2009), Nr. 2, S. 116–124
- [Azari et al. 2011] AZARI, S. ; PAPINI, M. ; SPELT, J.: Effect of adhesive thickness on fatigue and fracture of toughened epoxy joints–part I: experiments. In: *Engineering Fracture Mechanics* 78 (2011), Nr. 1, S. 153–162
- [Banea u. da Silva 2009] BANEAL, M. ; SILVA, L. da: Adhesively bonded joints in composite materials: an overview. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials Design and Applications* 223 (2009), Nr. 1, S. 1–18
- [Bansemir 1973] BANSEMIER, D.-I. H.: Krafteinleitung in versteifte orthotrope Scheiben. In: *Ingenieur-Archiv* 42 (1973), Nr. 2, S. 127–140
- [Barfusz 2013] BARFUSZ, O.: *Analyse der Energiefreisetzungsraten von Rissen in Klebverbindungen*, TU Darmstadt, Bachelor-Thesis, 2013
- [Bažant 1984] BAŽANT, Z.: Size effect in blunt fracture: concrete, rock, metal. In: *Journal of Engineering Mechanics* 110 (1984), Nr. 4, S. 518–535
- [Bažant u. Planas 1997] BAŽANT, Z. ; PLANAS, J.: *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*. Bd. 16. CRC press, 1997
- [Becker u. Gross 2002] BECKER, W. ; GROSS, D.: *Mechanik elastischer Körper und Strukturen*. Springer Verlag, 2002
- [Belingardi et al. 2001] BELINGARDI, G. ; GOGGIO, L. ; TARDITI, A.: On the optimization of single lap metal/plastics adhesive joints. In: *Key Engineering Materials* 221 (2001), S. 161–172
- [Bigwood u. Crocombe 1989] BIGWOOD, D. ; CROCOMBE, A.: Elastic analysis and engineering design formulae for bonded joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 9 (1989), Nr. 4, S. 229–242
- [Bigwood u. Crocombe 1990] BIGWOOD, D. ; CROCOMBE, A.: Non-linear adhesive bonded joint design analyses. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 10 (1990), Nr. 1, S. 31–41
- [Bogy 1971] BOGY, D.: Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions. In: *Journal of Applied Mechanics* 38 (1971), S. 377

- [Borden et al. 2012] BORDEN, M. J. ; VERHOOSEL, C. V. ; SCOTT, M. A. ; HUGHES, T. J. ; LANDIS, C. M.: A phase-field description of dynamic brittle fracture. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 217 (2012), S. 77–95
- [Borgmeier u. DeVries 1993] BORGMEIER, P. ; DEVRIES, K.: A fracture mechanics analysis of the effects of tapering adherends on the strength of adhesive lap joints. In: *Journal of Adhesion Science and Technology* 7 (1993), Nr. 9, S. 967–986
- [Bourdin 2007] BOURDIN, B.: Numerical implementation of the variational formulation for quasi-static brittle fracture. In: *Interfaces and Free Boundaries* 9 (2007), Nr. 3, S. 411–430
- [Bourdin et al. 2000] BOURDIN, B. ; FRANCFORT, G. A. ; MARIGO, J.-J.: Numerical experiments in revisited brittle fracture. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48 (2000), Nr. 4, S. 797–826
- [Bourdin et al. 2008] BOURDIN, B. ; FRANCFORT, G. A. ; MARIGO, J.-J.: The variational approach to fracture. In: *Journal of Elasticity* 91 (2008), Nr. 1-3, S. 5–148
- [Brighenti 2007] BRIGHENTI, R.: Patch repair design optimisation for fracture and fatigue improvements of cracked plates. In: *International Journal of Solids and Structures* 44 (2007), Nr. 3, S. 1115–1131
- [Broberg 1999] BROBERG, K. B.: *Cracks and fracture*. Academic Press, 1999
- [Camanho et al. 2012] CAMANHO, P. P. ; ERÇİN, G. H. ; CATALANOTTI, G. ; MAHDI, S. ; LINDE, P.: A Finite Fracture Mechanics model for the prediction of the open-hole strength of composite laminates. In: *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* (2012)
- [Campilho et al. 2011] CAMPILHO, R. ; BANEJA, M. ; PINTO, A. ; SILVA, L. da ; DE JESUS, A.: Strength prediction of single and double-lap joints by standard and eXtended finite element modeling. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* (2011)
- [Carpinteri 1982] CARPINTERI, A.: Notch sensitivity in fracture testing of aggregative materials. In: *Engineering Fracture Mechanics* 16 (1982), Nr. 4, S. 467–481
- [Carpinteri et al. 2009] CARPINTERI, A. ; CORNETTI, P. ; PUGNO, N.: Edge debonding in FRP strengthened beams: Stress versus energy failure criteria. In: *Engineering Structures* 31 (2009), Nr. 10, S. 2436–2447
- [Carpinteri et al. 2011] CARPINTERI, A. ; CORNETTI, P. ; PUGNO, N. ; SAPORA, A.: The problem of the critical angle for edge and center V-notched structures. In: *European Journal of Mechanics-A/Solids* (2011)

- [Carpinteri et al. 2012] CARPINTERI, A. ; CORNETTI, P. ; SAPORA, A.: A Finite Fracture Mechanics approach to the asymptotic behaviour of U-notched structures. In: *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 35 (2012), Nr. 5, S. 451–457
- [Castagnetti et al. 2011] CASTAGNETTI, D. ; SPAGGIARI, A. ; DRAGONI, E.: Effect of Bondline Thickness on the Static Strength of Structural Adhesives Under Nearly-Homogeneous Shear Stresses. In: *The Journal of Adhesion* 87 (2011), Nr. 7-8, S. 780–803
- [Catalanotti u. Camanho 2013] CATALANOTTI, G. ; CAMANHO, P.: A semi-analytical method to predict net-tension failure of mechanically fastened joints in composite laminates. In: *Composites Science and Technology* 76 (2013), S. 69–76
- [Chai 1988] CHAI, H.: Shear fracture. In: *International Journal of Fracture* 37 (1988), Nr. 2, S. 137–159
- [Charalambides et al. 1992] CHARALAMBIDES, M. ; KINLOCH, A. ; WANG, Y. ; WILLIAMS, J.: On the analysis of mixed-mode failure. In: *International Journal of Fracture* 54 (1992), Nr. 3, S. 269–291
- [Charalambides et al. 1997] CHARALAMBIDES, M. ; KINLOCH, A. ; MATTHEWS, F.: Strength prediction of bonded joints. In: *AGARD Conference on Bolted/Bonded Joints in Polymeric Composites, AGARD Conference Proceedings CP-590* DTIC Document, 1997
- [Chataigner et al. 2010] CHATAIGNER, S. ; CARON, J.-F. ; DIAZ DIAZ, A. ; AUBAGNAC, C. ; BENZARTI, K.: Non-linear failure criteria for a double lap bonded joint. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 30 (2010), Nr. 1, S. 10–20
- [Chen u. Cheng 1983] CHEN, D. ; CHENG, S.: An analysis of adhesive-bonded single-lap joints. In: *Journal of Applied Mechanics* 50 (1983), S. 109–115
- [Cheuk u. Tong 2002] CHEUK, P. ; TONG, L.: Failure of adhesive bonded composite lap shear joints with embedded precrack. In: *Composites Science and Technology* 62 (2002), Nr. 7, S. 1079–1095
- [Chiaia et al. 2008] CHIAIA, B. ; CORNETTI, P. ; FRIGO, B.: Triggering of dry snow slab avalanches: stress versus fracture mechanical approach. In: *Cold Regions Science and Technology* 53 (2008), Nr. 2, S. 170–178
- [Clark u. McGregor 1993] CLARK, J. ; MCGREGOR, I.: Ultimate tensile stress over a zone: a new failure criterion for adhesive joints. In: *The Journal of Adhesion* 42 (1993), Nr. 4, S. 227–245
- [Cornetti et al. 2012] CORNETTI, P. ; MANTIĆ, V. ; CARPINTERI, A.: Finite Fracture Mechanics at elastic interfaces. In: *International Journal of Solids and Structures* 49 (2012), Nr. 7, S. 1022–1032

- [Cornetti et al. 2006] CORNETTI, P. ; PUGNO, N. ; CARPINTERI, A. ; TAYLOR, D.: Finite fracture mechanics: a coupled stress and energy failure criterion. In: *Engineering Fracture Mechanics* 73 (2006), Nr. 14, S. 2021–2033
- [Cornetti et al. 2013] CORNETTI, P. ; SAPORA, A. ; CARPINTERI, A.: Mode mixity and size effect in V-notched structures. In: *International Journal of Solids and Structures* 50 (2013), Nr. 10, S. 1562–1582
- [Cornetti et al. 2014] CORNETTI, P. ; SAPORA, A. ; CARPINTERI, A.: Finite Fracture Mechanics vs. Cohesive Crack Modelling: an analytical comparison based on case studies. In: *16th European conference on Composite Materials (ECCM-14)* European Society of Composite Materials (ESCM), 2014
- [Crocombe 1989] CROCOMBE, A.: Global yielding as a failure criterion for bonded joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 9 (1989), Nr. 3, S. 145–153
- [Crocombe u. Adams 1981] CROCOMBE, A. ; ADAMS, R.: Influence of the spew fillet and other parameters on the stress distribution in the single lap joint. In: *The Journal of Adhesion* 13 (1981), Nr. 2, S. 141–155
- [Davies et al. 2009] DAVIES, P. ; SOHIER, L. ; COGNARD, J.-Y. ; BURMAUD, A. ; CHOQUEUSE, D. ; RINNERT, E. ; CREACHCADEC, R.: Influence of adhesive bond line thickness on joint strength. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 29 (2009), Nr. 7, S. 724 – 736
- [Delale et al. 1981] DELALE, F. ; ERDOGAN, F. ; AYDINOGLU, M.: Stresses in adhesively bonded joints: a closed-form solution. In: *Journal of Composite Materials* 15 (1981), Nr. 3, S. 249–271
- [Dempsey et al. 1995] DEMPSEY, J. ; ADAMSON, R. ; MULMULE, S.: Large-scale in-situ fracture of ice. In: *Vol. I (Proc., 2nd Int. Conf. on Fracture Mech. of Concrete Structures (FraMCoS-2), ETH, Zürich)*, 1995, S. 575–684
- [Dieringer u. Becker 2012] DIERINGER, R. ; BECKER, W.: Analysis of notches and cracks in circular Kirchhoff plates using the scaled boundary finite element method. In: *PAMM* 12 (2012), Nr. 1, S. 189–190
- [DIN 743-2 2012] Norm DIN 743-2 Dezember 2012. *Tragfähigkeitsberechnung von Wellen und Achsen - Teil 2: Formzahlen und Kerbwirkungszahlen.* – Deutsches Institut für Normung
- [Dugdale 1960] DUGDALE, D.: Yielding of steel sheets containing slits. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 8 (1960), Nr. 2, S. 100–104
- [Dundurs u. Markenscoff 1989] DUNDURS, J. ; MARKENSCOFF, X.: A Green's function formulation of anticracks and their interaction with load-induced singularities. In: *Journal of Applied Mechanics* 56 (1989), Nr. 3, S. 550–555

- [El Haddad et al. 1980] EL HADDAD, M. ; DOWLING, N. ; TOPPER, T. ; SMITH, K.: J integral applications for short fatigue cracks at notches. In: *International Journal of Fracture* 16 (1980), Nr. 1, S. 15–30
- [Engelstad u. Actis 2003] ENGELSTAD, S. ; ACTIS, R.: Development of p-Version handbook solutions for analysis of composite bonded joints. In: *Computers & Mathematics with Applications* 46 (2003), Nr. 1, S. 81–94
- [Eschenauer u. Schnell 1981] ESCHENAUER, H. ; SCHNELL, W.: *Elastizitätstheorie. 1. Grundlagen, Scheiben und Platten*. Bibliograph. Inst., 1981
- [Felger 2013] FELGER, J.: *Berechnung der effektiven Festigkeit von einschnittigen Klebverbindungen mit einer numerischen Umsetzung des hybriden Versagenskriteriums*, TU Darmstadt, Bachelor-Thesis, 2013
- [Fernlund et al. 1994] FERNLUND, G. ; PAPINI, M. ; MCCAMMOND, D. ; SPELT, J.: Fracture load predictions for adhesive joints. In: *Composites Science and Technology* 51 (1994), Nr. 4, S. 587–600
- [Fernlund u. Spelt 1991] FERNLUND, G. ; SPELT, J.: Failure load prediction of structural adhesive joints: Part 1: Analytical method. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 11 (1991), Nr. 4, S. 213–220
- [Fitton u. Broughton 2005] FITTON, M. ; BROUGHTON, J.: Variable modulus adhesives: an approach to optimised joint performance. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 25 (2005), Nr. 4, S. 329–336
- [Fletcher u. Pollard 1981] FLETCHER, R. C. ; POLLARD, D. D.: Anticrack model for pressure solution surfaces. In: *Geology* 9 (1981), Nr. 9, S. 419–424
- [Fraisie u. Schmit 1993] FRAISSE, P. ; SCHMIT, F.: Use of J-integral as fracture parameter in simplified analysis of bonded joints. In: *International Journal of Fracture* 63 (1993), Nr. 1, S. 59–73
- [Francfort u. Marigo 1998] FRANCFORT, G. A. ; MARIGO, J.-J.: Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 46 (1998), Nr. 8, S. 1319–1342
- [Frostig et al. 1999] FROSTIG, Y. ; THOMSEN, O. T. ; MORTENSEN, F.: Analysis of adhesive-bonded joints, square-end, and spew-fillet-high-order theory approach. In: *Journal of Engineering Mechanics* 125 (1999), Nr. 11, S. 1298–1307
- [García u. Leguillon 2012] GARCÍA, I. ; LEGUILLON, D.: Mixed-mode crack initiation at a v-notch in presence of an adhesive joint. In: *International Journal of Solids and Structures* (2012)
- [Geipel 2014] GEIPEL, D.: *Rissinitiierung an Spannungskonzentrationen: Einfluss der Sprödigkeit auf Versagensvorhersagen*, TU Darmstadt, Master-Thesis, 2014

- [Giovotto et al. 1983] GIVOTTO, V. ; BORRI, M. ; MANTEGAZZA, P. ; GHIRINGHELLI, G. ; CARMASCHI, V. ; MAFFIOLI, G. ; MUSSI, F.: Anisotropic beam theory and applications. In: *Computers & Structures* 16 (1983), Nr. 1, S. 403–413
- [Gleich et al. 2001] GLEICH, D. ; VAN TOOREN, M. ; BEUKERS, A.: Analysis and evaluation of bondline thickness effects on failure load in adhesively bonded structures. In: *Journal of Adhesion Science and Technology* 15 (2001), Nr. 9, S. 1091–1101
- [Goglio et al. 2008] GOGLIO, L. ; ROSSETTO, M. ; DRAGONI, E.: Design of adhesive joints based on peak elastic stresses. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 28 (2008), Nr. 8, S. 427–435
- [Goglio u. Rossetto 2010] GOGLIO, L. ; ROSSETTO, M.: Stress intensity factor in bonded joints: influence of the geometry. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 30 (2010), Nr. 5, S. 313–321
- [Goland u. Reissner 1944] GOLAND, M. ; REISSNER, E.: The stresses in cemented joints. In: *Journal of Applied Mechanics* 11 (1944), Nr. 1, S. A17–A27
- [Grant et al. 2009a] GRANT, L. ; ADAMS, R. ; SILVA, L. da: Effect of the temperature on the strength of adhesively bonded single lap and T joints for the automotive industry. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 29 (2009), Nr. 5, S. 535–542
- [Grant et al. 2009b] GRANT, L. ; ADAMS, R. ; SILVA, L. da: Experimental and numerical analysis of single-lap joints for the automotive industry. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 29 (2009), Nr. 4, S. 405–413
- [Grenestedt u. Hallstrom 1997] GRENESTEDT, J. L. ; HALLSTROM, S.: Crack initiation from homogeneous and bimaterial corners. In: *Journal of Applied Mechanics* 64 (1997), Nr. 4, S. 811–818
- [Grenestedt et al. 1996] GRENESTEDT, J. L. ; HALLSTRÖM, S. ; KUTTENKEULER, J.: On cracks emanating from wedges in expanded PVC foam. In: *Engineering Fracture Mechanics* 54 (1996), Nr. 4, S. 445–456
- [Griffith 1921] GRIFFITH, A. A.: The phenomena of rupture and flow in solids. In: *Philosophical transactions of the Royal Society of London. Series A, containing papers of a mathematical or physical character* 221 (1921), S. 163–198
- [Gross u. Seelig 2011] GROSS, D. ; SEELIG, T.: *Fracture mechanics: with an introduction to micromechanics*. Springer, 2011
- [Gross et al. 2012] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; SCHRÖDER, J. ; WALL, W. A.: *Technische Mechanik 2*. Springer, 2012
- [Groth 1988] GROTH, H.: Stress singularities and fracture at interface corners in bonded joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 8 (1988), Nr. 2, S. 107–113

- [Guo et al. 2006] GUO, S. ; DILLARD, D. A. ; PLAUT, R. H.: Effect of boundary conditions and spacers on single-lap joints loaded in tension or compression. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 26 (2006), Nr. 8, S. 629–638
- [Habenicht 2006] HABENICHT, G.: *Kleben: Grundlagen, Technologien, Anwendungen*. 5. Auflage. Berlin, Heidelberg : Springer, 2006 (VDI-Buch)
- [Harris u. Adams 1984] HARRIS, J. ; ADAMS, R.: Strength prediction of bonded single lap joints by non-linear finite element methods. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 4 (1984), Nr. 2, S. 65–78
- [Hart-Smith 1973] HART-SMITH, L. J.: *Adhesive-bonded single-lap joints*. Langley Research Center Hampton, VA, 1973
- [Hart-Smith 1981] HART-SMITH, L.: Stress analysis- A continuum mechanics approach (in adhesive bonded joints). In: *Developments in adhesives- 2*. (1981), S. 1–44
- [Haruna et al. 1996] HARUNA, K. ; HAMADA, H. ; MAEKAWA, Z.-I.: Strength prediction of adhesively bonded carbon/epoxy joints. In: *Journal of Adhesion Science and Technology* 10 (1996), Nr. 10, S. 1089–1104
- [Harzheim 2008] HARZHEIM, L.: *Strukturoptimierung: Grundlagen und Anwendungen*. Verlag Harri Deutsch, 2008
- [Hashin 1996] HASHIN, Z.: Finite thermoelastic fracture criterion with application to laminate cracking analysis. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 44 (1996), Nr. 7, S. 1129–1145
- [Hattori 1991] HATTORI, T.: A stress-singularity-parameter approach for evaluating the adhesive strength of single-lap joints. In: *JSME International Journal. Ser. 1, Solid Mechanics, Strength of Materials* 34 (1991), Nr. 3, S. 326–331
- [Hebel u. Becker 2008] HEBEL, J. ; BECKER, W.: Numerical analysis of brittle crack initiation at stress concentrations in composites. In: *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 15 (2008), Nr. 6-7, S. 410–420
- [Hebel et al. 2010] HEBEL, J. ; DIERINGER, R. ; BECKER, W.: Modeling brittle crack formation at geometrical and material discontinuities using a Finite Fracture Mechanics approach. In: *Engineering Fracture Mechanics* 77 (2010), Nr. 18, S. 3558–3572
- [Hebel 2010] HEBEL, J.: *Modellierung spröder Rissbildung an Spannungskonzentrationen mit der Bruchmechanik finiter Risse*. Bd. 22. Dissertation, TU Darmstadt, Studienbereich Mechanik, 2010
- [Heierli et al. 2011] HEIERLI, J. ; BIRKELAND, K. ; SIMENHOIS, R. ; GUMBSCH, P.: Anticrack model for skier triggering of slab avalanches. In: *Cold Regions Science and Technology* 65 (2011), Nr. 3, S. 372–381



- [Heierli et al. 2008] HEIERLI, J. ; GUMBSCH, P. ; ZAISER, M.: Anticrack nucleation as triggering mechanism for snow slab avalanches. In: *Science* 321 (2008), Nr. 5886, S. 240–243
- [Hell et al. 2014] HELL, S. ; WEISSGRAEBER, P. ; FELGER, J. ; BECKER, W.: A coupled stress and energy criterion for the assessment of crack initiation in single lap joints: A numerical approach. In: *Engineering Fracture Mechanics* 117 (2014), S. 112–126
- [Hell 2011] HELL, S.: *Numerische Bewertung von Klebverbindungen mit Hilfe der Bruchmechanik finiter Risse*, TU Darmstadt, Master-Thesis, 2011
- [Hetenyi 1958] HETENYI, M.: *Beams on elastic foundation; Theory with applications in the fields of civil and mechanical engineering*. 5. Ann Arbor, The University of Michigan Press, 1958
- [Higgins 2000] HIGGINS, A.: Adhesive bonding of aircraft structures. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 20 (2000), Nr. 5, S. 367–376
- [Hu 1995] HU, G.: Mixed mode fracture analysis of adhesive lap joints. In: *Composites Engineering* 5 (1995), Nr. 8, S. 1043–1050
- [Hu et al. 1992] HU, G. ; FRANCOIS, D. ; SCHMIT, F.: Non linear fracture mechanics for adhesive lap joints. In: *The Journal of Adhesion* 37 (1992), Nr. 4, S. 261–269
- [Hunston et al. 1989] HUNSTON, D. ; KINLOCH, A. ; WANG, S.: Micromechanics of fracture in structural adhesive bonds. In: *The Journal of Adhesion* 28 (1989), Nr. 2-3, S. 103–114
- [Ikegami et al. 1996] IKEGAMI, K. ; FUJII, T. ; KAWAGOE, H. ; KYOGOKU, H. ; MOTOIE, K. ; NOHNO, K. ; SUGIBAYASHI, T. ; YOSHIDA, F.: Benchmark tests on adhesive strengths in butt, single and double lap joints and double-cantilever beams. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 16 (1996), Nr. 4, S. 219–226
- [Irwin 1957] IRWIN, G. R.: Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. In: *J. Appl. Mech.* (1957)
- [Irwin 1958] IRWIN, G.: Fracture in “Handbuch der Physik,” 5. Auflage. New York, NY: Springer, 1958
- [Jarry u. Shenoï 2006] JARRY, E. ; SHENOI, R.: Performance of butt strap joints for marine applications. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 26 (2006), Nr. 3, S. 162–176
- [John et al. 1991] JOHN, S. ; KINLOCH, A. ; MATTHEWS, F.: Measuring and predicting the durability of bonded carbon fibre/epoxy composite joints. In: *Composites* 22 (1991), Nr. 2, S. 121–127

- [Jung u. Becker 2013] JUNG, J. D. ; BECKER, W.: An SBFEM element for thin-walled beams. In: *International Journal of Aerospace and Lightweight Structures* 3 (2013), Nr. 2, S. 207–220
- [Kafkalidis u. Thouless 2002] KAFKALIDIS, M. ; THOULESS, M.: The effects of geometry and material properties on the fracture of single lap-shear joints. In: *International Journal of Solids and Structures* 39 (2002), Nr. 17, S. 4367–4383
- [Karma et al. 2001] KARMA, A. ; KESSLER, D. A. ; LEVINE, H.: Phase-field model of mode III dynamic fracture. In: *Physical Review Letters* 87 (2001), Nr. 4, S. 045501
- [Kaye u. Heller 2002] KAYE, R. ; HELLER, M.: Through-thickness shape optimisation of bonded repairs and lap-joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 22 (2002), Nr. 1, S. 7–21
- [Kim u. Lee 2008] KIM, W. S. ; LEE, J. J.: Interfacial fracture analysis of adhesive-bonded joints. In: *Advanced Materials Research* 33 (2008), S. 327–332
- [Kinloch u. Shaw 1981] KINLOCH, A. ; SHAW, S.: The fracture resistance of a toughened epoxy adhesive. In: *The Journal of Adhesion* 12 (1981), Nr. 1, S. 59–77
- [Kinloch u. Williams 1980] KINLOCH, A. ; WILLIAMS, J.: Crack blunting mechanisms in polymers. In: *Journal of Materials Science* 15 (1980), Nr. 4, S. 987–996
- [Klarbring u. Movchan 1998] KLARBRING, A. ; MOVCHAN, A.: Asymptotic modelling of adhesive joints. In: *Mechanics of materials* 28 (1998), Nr. 1, S. 137–145
- [Kolupaev u. Bolchoun 2008] KOLUPAEV, V. A. ; BOLCHOUN, A.: Kombinierte Fließ- und Grenzbedingungen. In: *Forschung im Ingenieurwesen* 72 (2008), Nr. 4, S. 209–232
- [Kraft 1994] KRAFT, D.: Algorithm 733: TOMP–Fortran modules for optimal control calculations. In: *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* 20 (1994), Nr. 3, S. 262–281
- [Kraft 2014] KRAFT, M. B.: *Analyse der Energiefreisetzungsraten von Rissen in Klebverbindungen*, TU Darmstadt, Bachelor-Thesis, 2014
- [Krenk 1992] KRENK, S.: Energy release rate of symmetric adhesive joints. In: *Engineering Fracture Mechanics* 43 (1992), Nr. 4, S. 549–559
- [Krueger 2004] KRUEGER, R.: Virtual crack closure technique: history, approach, and applications. In: *Applied Mechanics Reviews* 57 (2004), Nr. 2, S. 109–143
- [Krueger et al. 2000] KRUEGER, R. ; CVITKOVICH, M. K. ; O'BRIEN, T. K. ; MINGUET, P. J.: Testing and analysis of composite skin/stringer debonding under multi-axial loading. In: *Journal of Composite Materials* 34 (2000), Nr. 15, S. 1263–1300

- [Kuhn 2013] KUHN, C.: *Numerical and Analytical Investigation of a Phase Field Model for Fracture*. Techn. Univ., Lehrstuhl für Techn. Mechanik, 2013 (Forschungsbericht). – Dissertation TU Kaiserslautern
- [Kuhn u. Müller 2010] KUHN, C. ; MÜLLER, R.: A continuum phase field model for fracture. In: *Engineering Fracture Mechanics* 77 (2010), Nr. 18, S. 3625–3634
- [Kuhn et al. 2013] KUHN, C. ; SCHLÜTER, A. ; MÜLLER, R.: A Phase Field Approach for Dynamic Fracture. In: *PAMM* 13 (2013), Nr. 1, S. 87–88
- [Lang u. Mallick 1998] LANG, T. ; MALLICK, P.: Effect of spew geometry on stresses in single lap adhesive joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 18 (1998), Nr. 3, S. 167–177
- [Lazzarin et al. 2002] LAZZARIN, P. ; QUARESIMIN, M. ; FERRO, P.: A two-term stress function approach to evaluate stress distributions in bonded joints of different geometries. In: *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 37 (2002), Nr. 5, S. 385–398
- [Leblond u. Mouro 1999] LEBLOND, J.-B. ; MOURO, P.: Crack propagation from a preexisting flaw at a notch root. In: *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics-Physics-Astronomy* 327 (1999), Nr. 6, S. 581–587
- [Leblond u. Mouro 2000a] LEBLOND, J.-B. ; MOURO, P.: Crack propagation from a pre-existing flaw at a notch root–II: Detailed form of the stress intensity factors at the initial crack tip and conclusion. In: *International Journal of Fracture* 104 (2000), Nr. 3, S. 223–237
- [Leblond u. Mouro 2000b] LEBLOND, J.-B. ; MOURO, P.: Crack propagation from a pre-existing flaw at a notch root. I. Introduction and general form of the stress intensity factors at the initial crack tip. In: *International Journal of Fracture* 104 (2000), Nr. 3, S. 209–222
- [Leguillon 1999] LEGUILLON, D.: Asymptotic analysis of a spontaneous crack growth. Application to a blunt crack. In: *IUTAM Symposium on Non-linear Singularities in Deformation and Flow*, Springer, 1999, S. 169–180
- [Leguillon 2002] LEGUILLON, D.: Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch. In: *European Journal of Mechanics-A/Solids* 21 (2002), Nr. 1, S. 61–72
- [Leguillon et al. 2003] LEGUILLON, D. ; LAURENCIN, J. ; DUPEUX, M.: Failure initiation in an epoxy joint between two steel plates. In: *European Journal of Mechanics-A/Solids* 22 (2003), Nr. 4, S. 509–524
- [Leguillon et al. 2007] LEGUILLON, D. ; QUESADA, D. ; PUTOT, C. ; MARTIN, E.: Prediction of crack initiation at blunt notches and cavities-size effects. In: *Engineering Fracture Mechanics* 74 (2007), Nr. 15, S. 2420–2436

- [Leguillon 2013] LEGUILLON, D.: A simple model of thermal crack pattern formation using the coupled criterion. In: *Comptes Rendus Mécanique* 341 (2013), Nr. 6, S. 538–546
- [Leguillon u. Martin 2013a] LEGUILLON, D. ; MARTIN, E.: The strengthening effect caused by an elastic contrast—part I: the bimaterial case. In: *International Journal of Fracture* 179 (2013), Nr. 1-2, S. 157–167
- [Leguillon u. Martin 2013b] LEGUILLON, D. ; MARTIN, E.: The strengthening effect caused by an elastic contrast—part II: stratification by a thin stiff layer. In: *International Journal of Fracture* 179 (2013), Nr. 1-2, S. 169–178
- [Lenci 2001] LENCI, S.: Analysis of a crack at a weak interface. In: *International Journal of Fracture* 108 (2001), Nr. 3, S. 275–290
- [Li u. Zhang 2006] LI, J. ; ZHANG, X.: A criterion study for non-singular stress concentrations in brittle or quasi-brittle materials. In: *Engineering Fracture Mechanics* 73 (2006), Nr. 4, S. 505–523
- [Li u. Bažant 1998] LI, Z. ; BAZANT, Z.: Acoustic emissions in fracturing sea ice plate simulated by particle system. In: *Journal of Engineering Mechanics* 124 (1998), Nr. 1, S. 69–79
- [Liljedahl et al. 2006] LILJEDAHL, C. ; CROCOMBE, A. ; WAHAB, M. ; ASHCROFT, I.: Damage modelling of adhesively bonded joints. In: *International Journal of Fracture* 141 (2006), Nr. 1-2, S. 147–161
- [Malyshev u. Salganik 1965] MALYSHEV, B. ; SALGANIK, R.: The strength of adhesive joints using the theory of cracks. In: *International Journal of Fracture Mechanics* 1 (1965), Nr. 2, S. 114–128
- [Mantič 2009] MANTIČ, V.: Interface crack onset at a circular cylindrical inclusion under a remote transverse tension. Application of a coupled stress and energy criterion. In: *International Journal of Solids and Structures* 46 (2009), Nr. 6, S. 1287–1304
- [Martin et al. 2010] MARTIN, E. ; LEGUILLON, D. ; CARRÈRE, N.: A twofold strength and toughness criterion for the onset of free-edge shear delamination in angle-ply laminates. In: *International Journal of Solids and Structures* 47 (2010), Nr. 9, S. 1297–1305
- [Martin et al. 2012] MARTIN, E. ; LEGUILLON, D. ; CARRÈRE, N.: A coupled strength and toughness criterion for the prediction of the open hole tensile strength of a composite plate. In: *International Journal of Solids and Structures* 49 (2012), Nr. 26, S. 3915–3922
- [Martin et al. 2008] MARTIN, E. ; POITOU, B. ; LEGUILLON, D. ; GATT, J.: Competition between deflection and penetration at an interface in the vicinity of a main crack. In: *International Journal of Fracture* 151 (2008), Nr. 2, S. 247–268

- [Mayland 2012] MAYLAND, W.: *Untersuchung zu Spannungssingularitätsordnungen in linear-elastischen und piezoelektrischen Multimaterialkonfigurationen mit der Rand-Finite-Elemente-Methode*. Bd. 25. Dissertation, TU Darmstadt, Studienbereich Mechanik, 2012
- [Miehe et al. 2010] MIEHE, C. ; WELSCHINGER, F. ; HOFACKER, M.: Thermodynamically consistent phase-field models of fracture: Variational principles and multi-field FE implementations. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 83 (2010), Nr. 10, S. 1273–1311
- [Mittelstedt 2006] MITTELSTEDT, C.: *Free Edge and Free Corner Effects in Composite Laminates: Closed Form Analytical and Semi-analytical Approaches*. VDI-Verlag, 2006 (Fortschritt-Berichte VDI: Reihe 18, Mechanik/Bruchmechanik). – Dissertation, TU Darmstadt
- [Modnijs et al. 2014] MODNIKS, J. ; SPĀRNIŠ, E. ; ANDERSONS, J. ; BECKER, W.: Analysis of the effect of a stress raiser on the strength of a UD flax/epoxy composite in off-axis tension. In: *Journal of Composite Materials* (2014)
- [Moler u. Van Loan 2003] MOLER, C. ; VAN LOAN, C.: Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later. In: *SIAM Review* 45 (2003), Nr. 1, S. 3–49
- [Moradi et al. 2013] MORADI, A. ; CARRÈRE, N. ; LEGUILLON, D. ; MARTIN, E. ; COGNARD, J.-Y.: Strength prediction of bonded assemblies using a coupled criterion under elastic assumptions: Effect of material and geometrical parameters. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 47 (2013), S. 73–82
- [Morandini et al. 2010] MORANDINI, M. ; CHIERICHETTI, M. ; MANTEGAZZA, P.: Characteristic behavior of prismatic anisotropic beam via generalized eigenvectors. In: *International Journal of Solids and Structures* 47 (2010), Nr. 10, S. 1327–1337
- [Müller et al. 2006] MÜLLER, A. ; BECKER, W. ; STOLTEN, D. ; HOHE, J.: A hybrid method to assess interface debonding by finite fracture mechanics. In: *Engineering Fracture Mechanics* 73 (2006), Nr. 8, S. 994–1008
- [Neto et al. 2012] NETO, J. ; CAMPILHO, R. ; SILVA, L. da: Parametric study of adhesive joints with composites. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* (2012)
- [Neuber 1933] NEUBER, H.: Elastisch-strenge Lösungen zur Kerbwirkung bei Scheiben und Umdrehungskörpern. In: *ZAMM, Bd 13* (1933), S. 439
- [Neuber 1934] NEUBER, H.: Zur Theorie der Kerbwirkung bei Biegung und Schub. In: *Ingenieur-Archiv* 5 (1934), Nr. 3, S. 238–244
- [Neuber 1936] NEUBER, H.: Theorie der technischen Formzahl. In: *Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens A* 7 (1936), Nr. 6, S. 271–274

- [Neuber 1958] NEUBER, H.: *Kerbspannungslehre: Grundlagen für genaue Festigkeitsberechnung mit Berücksichtigung von Konstruktionsform und Werkstoff*. Springer, 1958
- [Neuber 2000] NEUBER, H.: *Kerbspannungslehre: Theorie der Spannungskonzentration. Genaue Berechnung der Festigkeit*. Springer, 2000 (Klassiker der Technik)
- [das Neves et al. 2009a] NEVES, P. J. ; SILVA, L. da ; ADAMS, R.: Analysis of mixed adhesive bonded joints Part I: theoretical formulation. In: *Journal of Adhesion Science and Technology* 23 (2009), Nr. 1, S. 1–34
- [das Neves et al. 2009b] NEVES, P. J. ; SILVA, L. da ; ADAMS, R.: Analysis of mixed adhesive bonded joints part II: parametric study. In: *Journal of Adhesion Science and Technology* 23 (2009), Nr. 1, S. 35–61
- [Novozhilov 1969] NOVOZHILOV, V.: On a necessary and sufficient criterion for brittle strength. In: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 33 (1969), Nr. 2, S. 201–210
- [Ojalvo u. Eidinoff 1978] OJALVO, I. ; EIDINOFF, H.: Bond thickness effects upon stresses in single-lap adhesive joints. In: *AIAA Journal* 16 (1978), Nr. 3, S. 204–211
- [Oplinger 1994] OPLINGER, D.: Effects of adherend deflections in single lap joints. In: *International Journal of Solids and Structures* 31 (1994), Nr. 18, S. 2565–2587
- [Papini et al. 1994] PAPINI, M. ; FERNLUND, G. ; SPELT, J.: The effect of geometry on the fracture of adhesive joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 14 (1994), Nr. 1, S. 5–13
- [Parvizi et al. 1978] PARVIZI, A. ; GARRETT, K. ; BAILEY, J.: Constrained cracking in glass fibre-reinforced epoxy cross-ply laminates. In: *Journal of Materials Science* 13 (1978), Nr. 1, S. 195–201
- [Pilkey u. Pilkey 2008] PILKEY, W. ; PILKEY, D.: *Peterson's Stress Concentration Factors*. Wiley, 2008
- [Pirondi u. Moroni 2009] PIRONDI, A. ; MORONI, F.: An investigation of fatigue failure prediction of adhesively bonded metal/metal joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 29 (2009), Nr. 8, S. 796–805
- [Pirvics 1974] PIRVICS, J.: Two dimensional displacement-stress distributions in adhesive bonded composite structures. In: *The Journal of Adhesion* 6 (1974), Nr. 3, S. 207–228
- [Potra u. Wright 2000] POTRA, F. A. ; WRIGHT, S. J.: Interior-point methods. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 124 (2000), Nr. 1, S. 281–302

- [Priel et al. 2008] PRIEL, E. ; YOSIBASH, Z. ; LEGUILLON, D.: Failure initiation at a blunt V-notch tip under mixed mode loading. In: *International Journal of Fracture* 149 (2008), Nr. 2, S. 143–173
- [Pugno u. Ruoff 2004] PUGNO, N. ; RUOFF, R.: Quantized fracture mechanics. In: *Philosophical Magazine* 84 (2004), Nr. 27, S. 2829–2845
- [Quispe Rodríguez et al. 2012] QUISPE RODRÍGUEZ, R. ; PAIVA, W. P. ; SOLLERO, P. ; BERTONI RODRIGUES, M. R. ; ALBUQUERQUE, É. L.: Failure criteria for adhesively bonded joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 37 (2012), S. 26–36
- [Reedy Jr 2000] REEDY JR, E.: Connection between interface corner and interfacial fracture analyses of an adhesively-bonded butt joint. In: *International Journal of Solids and Structures* 37 (2000), Nr. 17, S. 2429–2442
- [Renton u. Vinson 1975] RENTON, W. J. ; VINSON, J. R.: The efficient design of adhesive bonded joints. In: *The Journal of Adhesion* 7 (1975), Nr. 3, S. 175–193
- [Reuter 2012] REUTER, F.: *Finite-Element-Modell zur Untersuchung der Versagenslasten von Klebverbindungen mit der Bruchmechanik finiter Risse*, TU Darmstadt, Bachelor-Thesis, 2012
- [Ribeiro-Ayeh u. Hallström 2003] RIBEIRO-AYEH, S. ; HALLSTRÖM, S.: Strength prediction of beams with bi-material butt-joints. In: *Engineering Fracture Mechanics* 70 (2003), Nr. 12, S. 1491–1507
- [Rice 1968] RICE, J. R.: A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. In: *Journal of applied mechanics* 35 (1968), Nr. 2, S. 379–386
- [Rispler et al. 2000] RISPLER, A. R. ; TONG, L. ; P STEVEN, G. ; WISNOM, M. R.: Shape optimisation of adhesive fillets. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 20 (2000), Nr. 3, S. 221–231
- [Rybicki u. Kanninen 1977] RYBICKI, E. F. ; KANNINEN, M.: A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral. In: *Engineering Fracture Mechanics* 9 (1977), Nr. 4, S. 931–938
- [Rybicki et al. 1977] RYBICKI, E. ; SCHMUESER, D. ; FOX, J.: An energy release rate approach for stable crack growth in the free-edge delamination problem. In: *Journal of Composite Materials* 11 (1977), Nr. 4, S. 470–487
- [Sadd 2010] SADD, M.: *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics*. Elsevier Science, 2010
- [Sator u. Becker 2012] SATOR, C. ; BECKER, W.: Closed-form solutions for stress singularities at plane bi-and trimaterial junctions. In: *Archive of Applied Mechanics* 82 (2012), Nr. 5, S. 643–658

- [Sator 2010] SATOR, C.: *Asymptotische Nahfeldanalysen ebener Multi-Materialverbindungsstellen mit der Methode komplexer Potentiale*. Bd. 21. Dissertation, TU Darmstadt, Studienbereich Mechanik, 2010
- [Schade u. Neemann 2009] SCHADE, H. ; NEEMANN, K.: *Tensoranalysis*. Bd. 3. de Gruyter, 2009
- [Schlimmer 1982] SCHLIMMER, M.: Anstrengungshypothese für Metallklebverbindungen. In: *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 13 (1982), Nr. 6, S. 215–221
- [Schumacher 2013] SCHUMACHER, J.: *Analyse von Klebverbindungen mit einem semi-analytischen Variationsansatz*, TU Darmstadt, Diplomarbeit, 2013
- [Schürmann 2007] SCHÜRMANN, H.: *Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden*. 2. Auflage. Berlin, Heidelberg : Springer, 2007 (VDI-Buch)
- [Seweryn 1994] SEWERYN, A.: Brittle fracture criterion for structures with sharp notches. In: *Engineering Fracture Mechanics* 47 (1994), Nr. 5, S. 673–681
- [Sheppard et al. 1998] SHEPPARD, A. ; KELLY, D. ; TONG, L.: A damage zone model for the failure analysis of adhesively bonded joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 18 (1998), Nr. 6, S. 385–400
- [da Silva u. Adams 2007] SILVA, L. da ; ADAMS, R.: Techniques to reduce the peel stresses in adhesive joints with composites. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 27 (2007), Nr. 3, S. 227–235
- [da Silva et al. 2004] SILVA, L. da ; ADAMS, R. ; GIBBS, M.: Manufacture of adhesive joints and bulk specimens with high-temperature adhesives. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 24 (2004), Nr. 1, S. 69–83
- [da Silva u. Campilho 2012] SILVA, L. da ; CAMPILHO, R. D.: *Advances in numerical modelling of adhesive joints*. Springer, 2012
- [da Silva et al. 2008] SILVA, L. da ; CRITCHLOW, G. ; FIGUEIREDO, M.: Parametric study of adhesively bonded single lap joints by the Taguchi method. In: *Journal of Adhesion Science and Technology* 22 (2008), Nr. 13, S. 1477–1494
- [da Silva et al. 2009a] SILVA, L. da ; NEVES, P. das ; ADAMS, R. ; SPELT, J.: Analytical models of adhesively bonded joints–Part I: Literature survey. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 29 (2009), Nr. 3, S. 319–330
- [da Silva et al. 2009b] SILVA, L. da ; NEVES, P. das ; ADAMS, R. ; WANG, A. ; SPELT, J.: Analytical models of adhesively bonded joints–Part II: Comparative study. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 29 (2009), Nr. 3, S. 331–341
- [da Silva u. Öchsner 2008] SILVA, L. da ; ÖCHSNER, A.: *Modeling of adhesively bonded joints*. Springer Verlag, 2008



- [da Silva et al. 2006] SILVA, L. da ; RODRIGUES, T. ; FIGUEIREDO, M. ; MOURA, M. D. ; CHOUSAL, J.: Effect of adhesive type and thickness on the lap shear strength. In: *The Journal of Adhesion* 82 (2006), Nr. 11, S. 1091–1115
- [Sinclair et al. 1984] SINCLAIR, G. ; OKAJIMA, M. ; GRIFFIN, J.: Path independent integrals for computing stress intensity factors at sharp notches in elastic plates. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 20 (1984), Nr. 6, S. 999–1008
- [Song 2004] SONG, C.: A matrix function solution for the scaled boundary finite-element equation in statics. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (2004), Nr. 23, S. 2325–2356
- [Sørensen u. Kirkegaard 2006] SØRENSEN, B. F. ; KIRKEGAARD, P.: Determination of mixed mode cohesive laws. In: *Engineering Fracture Mechanics* 73 (2006), Nr. 17, S. 2642–2661
- [Soutis u. Hu 1997] SOUTIS, C. ; HU, F.: Design and performance of bonded patch repairs of composite structures. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering* 211 (1997), Nr. 4, S. 263–271
- [Spatschek et al. 2006] SPATSCHEK, R. ; HARTMANN, M. ; BRENER, E. ; MÜLLER-KRUMBHAAR, H. ; KASSNER, K.: Phase field modeling of fast crack propagation. In: *Physical Review Letters* 96 (2006), Nr. 1, S. 015502
- [Srinivas 1975] SRINIVAS, S.: Analysis of Bonded Joints. / DTIC Document. 1975. – Forschungsbericht
- [Stapleton et al. 2012] STAPLETON, S. E. ; WAAS, A. M. ; ARNOLD, S. M.: Functionally graded adhesives for composite joints. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 35 (2012), S. 36–49
- [Stigh et al. 2010] STIGH, U. ; ALFREDSSON, K. S. ; ANDERSSON, T. ; BIEL, A. ; CARLBERGER, T. ; SALOMONSSON, K.: Some aspects of cohesive models and modelling with special application to strength of adhesive layers. In: *International Journal of Fracture* 165 (2010), Nr. 2, S. 149–162
- [Strang 2003] STRANG, G.: *Lineare Algebra*. Springer Berlin, 2003
- [Suo u. Hutchinson 1990] SUO, Z. ; HUTCHINSON, J. W.: Interface crack between two elastic layers. In: *International Journal of Fracture* 43 (1990), Nr. 1, S. 1–18
- [Tada et al. 2000] TADA, H. ; PARIS, P. ; IRWIN, G.: *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. 3. ASME Press, 2000
- [Taib et al. 2006] TAIB, A. A. ; BOUKHILI, R. ; ACHIOU, S. ; GORDON, S. ; BOUKEHILI, H.: Bonded joints with composite adherends. Part I. Effect of specimen configuration, adhesive thickness, spew fillet and adherend stiffness on

- fracture. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 26 (2006), Nr. 4, S. 226–236
- [Taylor 2007] TAYLOR, D.: *The theory of critical distances: A new perspective in fracture mechanics*. Elsevier Science, 2007
- [Tong 1996] TONG, L.: Bond strength for adhesive-bonded single-lap joints. In: *Acta Mechanica* 117 (1996), Nr. 1-4, S. 101–113
- [Tong 1998] TONG, L.: Strength of adhesively bonded single-lap and lap-shear joints. In: *International Journal of Solids and Structures* 35 (1998), Nr. 20, S. 2601–2616
- [Tran et al. 2012] TRAN, V. ; LEGUILLON, D. ; KRISHNAN, A. ; XU, L.: Interface crack initiation at V-notches along adhesive bonding in weakly bonded polymers subjected to mixed-mode loading. In: *International Journal of Fracture* 35 (2012), Nr. 1, S. 1–15
- [Tsai u. Morton 1994a] TSAI, M. ; MORTON, J.: A note on peel stresses in single-lap adhesive joints. In: *ASME, Transactions, Journal of Applied Mechanics* 61 (1994), Nr. 3, S. 712–715
- [Tsai u. Morton 1994b] TSAI, M. ; MORTON, J.: An evaluation of analytical and numerical solutions to the single-lap joint. In: *International Journal of Solids and Structures* 31 (1994), Nr. 18, S. 2537–2563
- [Tsai et al. 1998] TSAI, M. ; OPLINGER, D. ; MORTON, J.: Improved theoretical solutions for adhesive lap joints. In: *International Journal of Solids and Structures* 35 (1998), Nr. 12, S. 1163–1185
- [Vallée u. Keller 2006] VALLÉE, T. ; KELLER, T.: Adhesively bonded lap joints from pultruded GFRP profiles. Part III: Effects of chamfers. In: *Composites Part B: Engineering* 37 (2006), Nr. 4, S. 328–336
- [Van Noort et al. 1989] VAN NOORT, R. ; NOROOZI, S. ; HOWARD, I. ; CARDEW, G.: A critique of bond strength measurements. In: *Journal of Dentistry* 17 (1989), Nr. 2, S. 61–67
- [Volkersen 1938] VOLKERSEN, O.: Die Nietkraftverteilung in zugbeanspruchten Nietverbindungen mit konstanten Laschenquerschnitten. In: *Luftfahrtforschung* 15 (1938), Nr. 1/2, S. 41–47
- [Waddoups et al. 1971] WADDOUPS, M. ; EISENMANN, J. ; KAMINSKI, B.: Macroscopic fracture mechanics of advanced composite materials. In: *Journal of Composite Materials* 5 (1971), Nr. 4, S. 446–454
- [Wang u. Crossman 1980] WANG, A. ; CROSSMAN, F.: Initiation and growth of transverse cracks and edge delamination in composite laminates part 1. An energy method. In: *Journal of Composite Materials* 14 (1980), Nr. 1, S. 71–87

- [Wegman u. Van Twisk 2012] WEGMAN, R. ; VAN TWISK, J.: *Surface Preparation Techniques for Adhesive Bonding*. Elsevier Science, 2012
- [Weißgraeber 2013] WEISSGRAEBER, P.: A coupled stress and energy failure model for adhesively bonded single lap joints. In: *Luftfahrttechnisches Handbuch* Band Faserverbund-Leichtbau, FL 33 100-38 (2013)
- [Weißgraeber u. Becker 2011a] WEISSGRAEBER, P. ; BECKER, W.: Analysis of crack formation in bonded lap joints using finite fracture mechanics on the basis of linear elasticity solutions. In: *PAMM* 11 (2011), Nr. 1, S. 181–182
- [Weißgraeber u. Becker 2011b] WEISSGRAEBER, P. ; BECKER, W.: A new Finite Fracture Mechanics approach for assessing the strength of bonded lap joints. In: *Key Engineering Materials* 471 (2011), S. 1075–1080
- [Weißgraeber u. Becker 2011c] WEISSGRAEBER, P. ; BECKER, W.: Predicting effective strengths of bonded lap joints with a finite fracture mechanics criterion. In: FÆSTER, S. (Hrsg.) ; JENSEN, D. J. (Hrsg.) ; RALPH, B. (Hrsg.) ; SØRENSEN, B. (Hrsg.) ; Technical University of Denmark (Veranst.): *Proceedings of the 32nd Risø International Symposium in Materials Science “Composite Materials for Structural Performance: Towards higher Limits”*. Technical University of Denmark, 2011, S. 479–486
- [Weißgraeber u. Becker 2013] WEISSGRAEBER, P. ; BECKER, W.: Finite Fracture Mechanics model for mixed mode fracture in adhesive joints. In: *International Journal of Solids and Structures* 50 (2013), Nr. 14, S. 2383–2394
- [Weißgraeber et al. 2014a] WEISSGRAEBER, P. ; FELGER, J. ; HELL, S. ; BECKER, W.: Crack initiation in adhesive bonds: Effect of geometrical and material properties. In: *International Journal of Fracture* Zur Begutachtung eingereicht (2014), S. –
- [Weißgraeber et al. 2014b] WEISSGRAEBER, P. ; GEIPEL, D. ; FELGER, J. ; ; BECKER, W.: Crack initiation at elliptical holes. In: *European Journal of Mechanics-A/Solids* In Vorbereitung (2014), S. –
- [Weißgraeber et al. 2014c] WEISSGRAEBER, P. ; STEIN, N. ; BECKER, W.: A general sandwich-type model for adhesive joints with composite adherends. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 55 (2014), S. 56–63
- [Westergaard 1933] WESTERGAARD, H.: Stresses at a crack, size of the crack, and the bending of reinforced concrete. In: *ACI Journal Proceedings* Bd. 30 ACI, 1933
- [Whitney u. Nuismer 1974] WHITNEY, J. M. ; NUISMER, R.: Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations. In: *Journal of Composite Materials* 8 (1974), Nr. 3, S. 253–265
- [Wieghardt 1907] WIEGHARDT, K.: Über das Spalten und Zerreißen elastischer Körper. In: *Z. Mathematik und Physik* 55 (1907), Nr. 2, S. 60–103

- [Williams 1988] WILLIAMS, J.: On the calculation of energy release rates for cracked laminates. In: *International Journal of Fracture* 36 (1988), Nr. 2, S. 101–119
- [Williams 1952] WILLIAMS, M.: Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. In: *J. Appl. Mech* 19 (1952), Nr. 4, S. 526–528
- [Wolf 2003] WOLF, J. P.: *The scaled boundary finite element method*. John Wiley & Sons Inc, 2003
- [Wooley u. Carver 1971] WOOLEY, G. ; CARVER, D.: Stress concentration factors for bonded lap joints. In: *Journal of Aircraft* 8 (1971), Nr. 10, S. 817–820
- [Yang u. Pang 1996] YANG, C. ; PANG, S.-S.: Stress-strain analysis of single-lap composite joints under tension. In: *Journal of Engineering Materials and Technology* 118 (1996), Nr. 2, S. 247–255
- [Yosibash et al. 2004] YOSIBASH, Z. ; BUSSIBA, A. ; GILAD, I.: Failure criteria for brittle elastic materials. In: *International Journal of Fracture* 125 (2004), S. 307–333
- [Yousefsani u. Tahani 2013] YOUSEFSANI, S. A. ; TAHANI, M.: Analytical solutions for adhesively bonded composite single-lap joints under mechanical loadings using full layerwise theory. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 43 (2013), S. 32–41
- [Zhao et al. 1990] ZHAO, X. ; ADAMS, R. ; PAVIER, M.: A new approach to determining the bending moment factors in single lap joints. In: *Proceedings of Adhesion '90*. London : Plastics and Rubber Institute, 1990, S. 35/1—35/6
- [Zienkiewicz u. Taylor 2005] ZIENKIEWICZ, O. ; TAYLOR, R.: *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Elsevier Science, 2005
- [Zienkiewicz u. Zhu 2005] ZIENKIEWICZ, O. ; ZHU, J.: *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Elsevier/Butterworth-Heinemann, 2005
- Insgesamt 250 Referenzen.





## **Bisher sind in dieser Reihe erschienen**

### **Band 1**

Zur mikrorissinduzierten Schädigung spröder Materialien

B. Lauterbach, Dissertation 2001, ISBN 3-935868-01-4

### **Band 2**

3D-Simulation der Mikrostrukturentwicklung in Zwei-Phasen-Materialien

R. Müller, Dissertation 2001, ISBN 3-935868-02-2

### **Band 3**

Zur numerischen Simulation von Morphologieänderungen in mikro-heterogenen Materialien

S. Kolling, Dissertation 2001, ISBN 3-935868-03-0

### **Band 4**

Theoretische und numerische Untersuchung von Versagensmechanismen in Metall-Keramik-Verbundwerkstoffen

T. Emmel, Dissertation 2002, ISBN 3-935868-04-9

### **Band 5**

On microcrack dominated problems in dynamics and statics of brittle fracture: a numerical study by boundary element techniques

S. Rafiee, Dissertation 2002, ISBN 3-935868-05-7

### **Band 6**

Kontinuumsmechanik anisotroper Festkörper und Fluide

H. Ehrentraut, Habilitationsschrift 2002, ISBN 3-935868-06-5

### **Band 7**

Plane unsteady inviscid incompressible hydrodynamics of a thin elastic profile

N. Blinkova, Dissertation 2002, ISBN 3-935868-07-3

### **Band 8**

Anmerkungen zur Simulation von entfestigendem Materialverhalten

H. Baaser, Habilitationsschrift 2004, ISBN 3-935868-08-1

### **Band 9**

Orts- und zeitadaptive DAE-Methoden zur Beschreibung elastisch-plastischen Materialverhaltens innerhalb der FEM

S. Eckert, Dissertation 2005, ISBN 3-935868-09-X

**Band 10**

Simulations of the Flow of the Ross Ice Shelf, Antarctica: Parameter Sensitivity Tests and Temperature-Dependent Rate Factor

A. Humbert, Dissertation 2005, ISBN 3-935868-10-3

**Band 11**

A Thermo-mechanical Continuum Theory with Internal Length of Cohesionless Granular Materials

Chung Fang, Dissertation 2006, ISBN 3-935868-11-1

**Band 12**

Modeling Dry Granular Avalanches past Different Obstructions: Numerical Simulation and Laboratory Analyses

Chiou Min-Ching, Dissertation 2006, ISBN 3-935868-12-X

**Band 13**

Configurational forces in defect mechanics and in computational methods

R. Müller, Habilitationsschrift 2005, ISBN 3-935868-13-8

**Band 14**

Hyperelastic dynamics in physical and material space

S. Kolling, Habilitationsschrift 2007, ISBN 978-3-935868-14-3

**Band 15**

Phenomenological modeling of ferroelectric material behavior

V. Mehling, Dissertation 2007, ISBN 978-3-935868-15-0

**Band 16**

Ein mischungsbasiertes Materialmodell zum Knochenumbau

R.-R. Kühn, Dissertation 2006, ISBN 978-3-935868-16-7

**Band 17**

Einige Erweiterungen der Rand-Finite-Elemente-Methode und deren Anwendung auf Randeffekte in ebenen Laminaten

J. Artel, Dissertation 2007, ISBN 978-3-935868-17-4

**Band 18**

Spannungskonzentrations-Effekte an Verstärkungspflaster-Ecken

H. Wigger, Dissertation 2008, ISBN 978-3-935868-18-1

**Band 19**

Rotationseffekte in der Kristallplastizität

C. Bröse, Dissertation 2007, ISBN 978-3-935868-19-8



**Band 20**

Finite-Element-Modelle zur Simulation von Delaminationen dünner Filme auf Substraten

V. D. Pham, Dissertation 2010, ISBN 978-3-935868-20-4

**Band 21**

Asymptotische Nahfeldanalysen ebener Multi-Materialverbindungsstellen mit der Methode komplexer Potentiale

C. Sator, Dissertation 2010, ISBN 978-3-935868-21-1

**Band 22**

Modellierung spröder Rissbildung an Spannungskonzentrationen mit der Bruchmechanik finiter Risse

J. Hebel, Dissertation 2010, ISBN 978-3-935868-22-8

**Band 23**

Some Contributions to the Homogenization of Macroscopically Isotropic Composites

V. Salit, Dissertation 2011, ISBN 978-3-935868-23-5

**Band 24**

Asymptotic Analysis of the Load Transfer on Double-Lap Bolted Joints

J. Kratochvíl, Dissertation 2012, ISBN 978-3-935868-24-2

**Band 25**

Spannungssingularitätsordnungen in linear-elastischen und piezoelektrischen Multimaterialkonfigurationen mit der Rand-Finite-Elemente-Methode

W. Mayland, Dissertation 2012, ISBN 978-3-935868-25-9

**Band 26**

Plastizität und Skaleneffekte sowie Deformations- und Versagensmodellierung dünner metallischer Schichten bei Nanoindentation

A. Trondl, Dissertation 2012, ISBN 978-3-935868-26-6

**Band 27**

Theoretical modeling and parallel programming of a nonlinear composite finite shell element based on a mixed global-local variational principle

M. Schürg, Dissertation 2012, ISBN 978-3-935868-27-3

**Band 28**

Strukturmechanische Modellierung und Analyse des Tragverhaltens von dünnwandigen hochbelasteten Composite-Biege- und Querkraftträgern

A. M. Kroker, Dissertation 2012, ISBN 978-3-935868-28-0

**Band 30**

Der Laminatrandeffekt und seine Analyse, insbesondere mit der Rand-Finite-Elemente-Methode

J. Lindemann, Dissertation 2013, ISBN 978-3-935868-30-3

**Band 31**

Avoidance of brake squeal by a separation of the brake disc's eigenfrequencies: A structural optimization problem

A. Wagner, Dissertation 2013, ISBN 978-3-935868-31-0

**Band 32**

Ultrasonic Generators for Energy Harvesting Applications: Self-Excitation and Mechanical Frequency Transformation

E. Heffel, Dissertation 2013, ISBN 978-3-935868-32-7



In dieser Arbeit werden neue Analysemethoden für Klebverbindungen vorgeschlagen. Nach einer Darstellung der theoretischen Grundlagen, insbesondere der Hintergründe der finiten Bruchmechanik, wird eine Übersicht über den Stand der Forschung gegeben und die Defizite derzeitiger Analysezugänge diskutiert. Für die Analyse der Lastübertragung in einschnittigen Klebverbindungen wird ein semi-analytisches Berechnungsverfahren entwickelt. Die Ergebnisse dieser effizienten Analyse zeigen eine sehr gute Konvergenz und Übereinstimmung mit Referenzrechnungen. Für die Analyse der Rissinitiierung in einschnittigen Klebverbindungen werden zwei Umsetzungen der finiten Bruchmechanik vorgestellt: eine detaillierte numerische Umsetzung und eine hocheffiziente Umsetzung auf Basis klassischer geschlossen-analytischer Lösungen. Die Versagenslastvorhersagen zeigen gute Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen.